OTTICA Q 16/12/20

FORMULA di MANDEL-KELLŸ-KLEINER

POVM detector inefficiente

$$\Pi_n = :\frac{\exp(-\eta a^\dagger a)(\eta a^\dagger a)^n}{n!}:$$

$$|k\rangle = \frac{a^{\dagger k}}{\sqrt{k!}}|0\rangle$$

$$\Pi_n = \sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}\eta^n(1-\eta)^{k-n}|k\rangle\langle k| = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{\cancel{k!}}{n!(k-n)!}\eta^n(1-\eta)^{k-n}\frac{a^{\dagger k}|0\rangle\langle 0|a^k}{\cancel{\sqrt{k!}}\,\cancel{\sqrt{k!}}}$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{n!(k-n)!}\eta^n(1-\eta)^{k-n}\underbrace{a^{\dagger k}:e^{-a^\dagger a}:a^k}_{:(a^\dagger a)^k e^{-a^\dagger a}:}$$

$$|0\rangle\langle 0| = :e^{-a^\dagger a}:$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,m!}\eta^n(1-\eta)^m :(a^\dagger a)^{n+m}e^{-a^\dagger a}: =$$

$$m = k-n$$

$$= \frac{1}{n!}\eta^n :(a^\dagger a)^n \underbrace{e^{(1-\eta)a^\dagger a}}_{\cancel{e^{a^\dagger a}}e^{-\eta a^\dagger a}}\cancel{e^{-a^\dagger a}}: = \frac{:(\eta a^\dagger a)^n e^{-\eta a^\dagger a}:}{n!}$$

APD o il tubo fotomoltiplicatore inefficiente: POVM?

caso ideale $\rightarrow$ $\Pi_{\text{no click}} = |0\rangle\langle 0|$ $\longrightarrow$ $\Pi_{\text{no click}}(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty}(1-\eta)^k|k\rangle\langle k| = :e^{-\eta a^\dagger a}:$

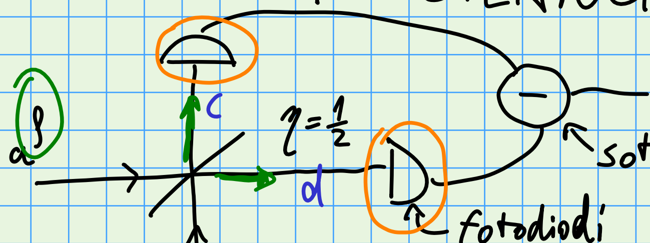
$\Pi_{\text{click}} = \mathbb{1} - |0\rangle\langle 0|$

$$\downarrow$$

$$\Pi_{\text{click}}(\eta) = \mathbb{1} - \Pi_{\text{no click}}(\eta)$$

formula del detector ineff per $n=0$

OMODINA BILANCIATO → misura osservabile quadratura X_φ



sottrazione dei segnali di uscita dei due detectors

b LO (local oscillator)

$|\alpha\rangle$ ← coerente intenso $|\alpha| >> 1$

esperimento difficile

① deve essere perfettamente simmetrico

② problema del $\boxed{\text{mode matching}}$ → devo essere sicuro che la trattazione a 2 modi sia adeguata: devo essere sicuro che i detector rivelino i modi c, d ottenuti combinando a e b che sono i modi dove c'è il segnale e l'oscillatore locale

(per rivelaz diretta gli altri modi non sono un problema se sono nel vuoto $|0\rangle$ → la rivelazione diretta non dà segnale, ma nell'omodina il vuoto dà segnale)

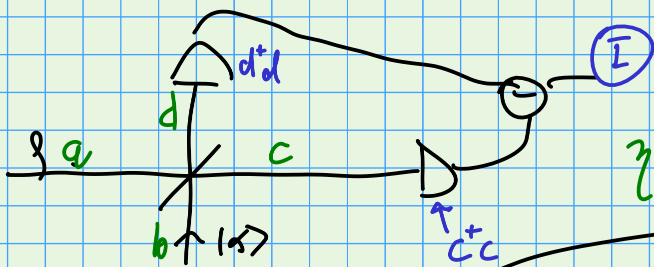
mode matching è un problema in molti esperimenti

③ l'oscillatore locale deve essere stabilizzato interferometricamente → X_φ è determinata dalla fase del coerente $|\alpha\rangle$ $\alpha = \rho e^{i\varphi}$

ma la fase del coerente cambia con l'evoluz libera $|\alpha e^{-i\omega t}\rangle$

ω ← freq ottica

OMODINA misura quadratura $X_\varphi \stackrel{def}{=} \dfrac{a^\dagger e^{i\varphi} + a e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}}$



$\eta = \frac{1}{2}$ l'evoluz Heis: $\begin{cases} c = \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b) \\ d = \frac{1}{\sqrt{2}}(a-b) \end{cases}$

$$I \propto c^\dagger c - d^\dagger d \propto (a^\dagger + b^\dagger)(a+b) - (a^\dagger - b^\dagger)(a-b) =$$

$$= a^\dagger a + a^\dagger b + b^\dagger a + b^\dagger b - (a^\dagger a - a^\dagger b - b^\dagger a + b^\dagger b) \propto$$

$$= a^\dagger b + b^\dagger a$$

$$\langle I \rangle \propto \langle a^\dagger b + b^\dagger a \rangle = \mathrm{Tr}\left[(a^\dagger b + b^\dagger a)\, \rho_a \otimes |\alpha\rangle_b\langle\alpha|\right] =$$

$$= \mathrm{Tr}\left[\rho_a \; {}_b\langle\alpha| a^\dagger \overset{\alpha}{b} + \underset{\alpha^*}{b^\dagger} a |\alpha\rangle_b\right] = \mathrm{Tr}\left[\rho_a (a^\dagger \alpha + a\alpha^*)\right] =$$

$\hookrightarrow$ $b|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

$\langle\alpha| b^\dagger = \alpha^* \langle\alpha|$

$\alpha = q e^{i\varphi}$

$$= \sqrt{2}\, q\, \mathrm{Tr}\left[\rho_a \left(\frac{a^\dagger e^{i\varphi} + a e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}}\right)\right] = \sqrt{2}\, q\, \mathrm{Tr}\left[\rho_a X_\varphi\right] \propto \langle X_\varphi \rangle$$

il valor medio di I è il valore di aspettaz della quadratura $\rightarrow$ SOLO il valore di aspettaz! (primo momento)

Bisogna verificarlo per tutti i momenti

$\rightarrow$ funzione caratteristica $\quad \chi(\lambda) \stackrel{def}{=} \int dx\, p(x)\, e^{i\lambda x}$

$$\langle x^n \rangle = (-i)^n \left.\frac{\partial^n \chi}{\partial \lambda^n}\right|_{\lambda=0} \qquad (ix)^n e^{i\lambda x}$$

$$(-i)^n \left.\frac{\partial^n \chi}{\partial \lambda^n}\right|_{\lambda=0} = (-i)^n \left.\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n}\right|_{\lambda=0} \int dx\, p(x)\, e^{i\lambda x} =$$

$$= \int dx\, p(x)\, x^n \cancel{e^{i\lambda x}}\Big|_{\lambda=0} = \int dx\, p(x)\, x^n = \langle x^n \rangle$$

$(-i)^n i^n = 1$

per osservabile $\hat{O} \longrightarrow \chi(\lambda) = \langle e^{i\lambda O} \rangle$

$$p(x) \overset{\text{antiTF}}{=} \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-i\lambda x} \chi(\lambda) \quad \text{con i momenti corretti}$$

2° momento

distribuz di prob per misura di O

$$\langle O^2 \rangle = \int dx\, p(x)\, x^2 = (-i)^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \lambda^2}\Big|_{\lambda=0} \overset{\text{IMP}}{=} \langle O^2 \rangle$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\chi = \langle e^{i\lambda O} \rangle}$$

OMODINA $\quad I = \dfrac{(c^\dagger c - d^\dagger d)}{\sqrt{2}\, q} \quad \chi(\lambda) = \langle e^{i\lambda I} \rangle$

$$p(x) = \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-i\lambda x} \chi(\lambda) = \underbrace{\int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-i\lambda x} \langle e^{i\lambda I} \rangle}_{\int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-i\lambda x} \mathrm{Tr}\left[\rho_a \, {}_b\langle \alpha | e^{i\lambda I} | \alpha \rangle_b\right]} \overset{\text{regola Born}}{=} \mathrm{Tr}\left[\rho_a \Pi_x\right]$$

$$\forall \rho_a \Rightarrow \boxed{\Pi_x = \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-i\lambda x}\, {}_b\langle \alpha | e^{i\lambda I} | \alpha \rangle_b}$$

op di a, b

op di a

procedura generale per ottenere la POVM di un apparato

$$\Pi_x \overset{I = \frac{a^\dagger b - b^\dagger a}{\sqrt{2}\, q}}{=} \int \frac{d\lambda}{2\pi}\, {}_b\langle \alpha | e^{i\lambda\left(\frac{a^\dagger b - b^\dagger a}{\sqrt{2}\, q} - x\right)} | \alpha \rangle_b =$$

BCH di SU(2)
stessa del Beam splitter

$$e^{\frac{i\lambda}{\sqrt{2}q}(a^+b - b^+a)} = \underbrace{e^{i\, tg\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}q}\right) ab^+} \left[\cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}q}\right)\right]^{a^+a - b^+b} e^{i\, tg\frac{\lambda}{\sqrt{2}q} a^+b}}_{\sim}$$

$$\simeq e^{i\frac{\lambda}{\sqrt{2}q} ab^+} e^{-\frac{\lambda^2}{4q^2} b^+b} e^{i\frac{\lambda}{\sqrt{2}q} ab} =$$

$|\alpha| \gg 1$, $|\alpha| = q$ $\qquad tg\frac{\lambda}{\sqrt{2}q} \sim \frac{\lambda}{\sqrt{2}q}$

$$\cos\frac{\lambda}{\sqrt{2}q} \sim 1 - \frac{\lambda^2}{4q^2} \Rightarrow e^{\log\cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}q}\right)} \sim$$

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$e^{\log\left(1 - \frac{\lambda^2}{4q^2}\right)} \sim e^{-\frac{\lambda^2}{4q^2}}$$

$\log(1+x) \sim x$

$$\left(\cos\frac{\lambda}{\sqrt{2}q}\right)^{\cancel{a^+a} - b^+b} \sim e^{+\frac{\lambda^2}{4q^2} b^+b}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}(-1)^{n+1}$$

$|\alpha|^2 = q^2$

$$\langle\alpha| e^{\frac{i\lambda}{\sqrt{2}q} ab^+} e^{-\frac{\lambda^2}{4q^2} b^+b} e^{i\frac{\lambda}{\sqrt{2}q} a^+b} |\alpha\rangle_b = e^{\frac{i\lambda}{\sqrt{2}q} a\alpha^*} e^{\frac{i\lambda a^+\alpha}{\sqrt{2}q}} \langle\alpha| e^{-\frac{\lambda^2}{4q^2} b^+b} |\alpha\rangle_b$$

$$= e^{\frac{i\lambda}{\sqrt{2}} ae^{-i\varphi}} e^{\frac{i\lambda}{2} a^+e^{i\varphi}} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} = e^{i\lambda\left(\frac{ae^{-i\varphi} + a^+e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}\right)} = e^{i\lambda X_\varphi}$$

$\alpha = q e^{i\varphi}$

$$e^A e^B = e^{A + B + \frac{1}{2}[A,B]}$$

A, B commutano con il commutatore

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda}{\sqrt{2}} a, \frac{\lambda}{\sqrt{2}} a^+\right] = \frac{\lambda^2}{4}$$

$$\Pi_x = \int \frac{d\lambda}{2\pi} \langle\beta| e^{i\lambda(I - x)} |\beta\rangle =$$

$$\langle\beta| e^{i\lambda I} |\beta\rangle \sim e^{i\lambda X_\varphi}$$

$$= \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda(X_\varphi - x)} = \delta(\hat{X}_\varphi - x) =$$

$$f(\hat{X}) = \int dx' f(x') |x'\rangle\langle x'|$$

$$= \int dx' \, \delta(x' - x) |x'\rangle\langle x'| = |x\rangle\langle x|$$

$|x'\rangle$ è autost di X_φ

$\Pi_x = |x\rangle\langle x| \rightarrow$ POVM è il proiettore sull'autost

$|x\rangle$ della quadratura X_φ

cioè l'omodina misura l'osservabile quadratura

ricapitolando OMODINA misura $I \propto c^\dagger c - d^\dagger d$ e abbiamo visto $\langle I \rangle = \langle X_\varphi \rangle$

$$\Pi_x = |x\rangle\langle x|$$

ricordate $\rightarrow$ X_φ quadrature non sono compatibili

es: $[X_\varphi, X_{\varphi+\frac{\pi}{2}}] = i$

omodina misura un set di osservabili non compatibili

è un set completo di osservabili cioè è una base per lo spazio degli osservabili $\rightarrow$ $\forall$ osservabile si può scrivere usando una base di funzioni di op quadratura

$\rightarrow$ tomografia omodina : misuro lo stato di un sistema facendo misure di quadratura ripetute

se ho N copie del sistema e misuro la quadratura su ciascuna $\rightarrow$ posso ottenere lo stato

$$X_\varphi = \frac{a^\dagger e^{i\varphi} + a e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}}$$

① $\rightarrow$ identità tomografica

$$\rho = \int \frac{d^2\lambda}{\pi} \, Tr\left[\rho \, \underbrace{e^{\lambda a^\dagger - \lambda^* a}}_{D(\lambda)}\right] \underbrace{e^{\lambda^* a - \lambda a^\dagger}}_{D^\dagger(\lambda)} =$$

risoluz spettrale nello sp operatori

identità

$$\lambda = \frac{ik}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \left(= \rho e^{i\varphi'}\right) \Rightarrow \frac{d^2\lambda}{\pi} = \frac{dk\, k}{2\pi} d\varphi$$

coerente

$$= \int_0^{+\infty} \frac{dk\, k}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi\, \mathrm{Tr}\left[\rho\, \underbrace{e^{\overbrace{\frac{ik}{\sqrt{2}} a^\dagger e^{i\varphi}}^{\lambda a^\dagger} + \overbrace{\frac{ik}{\sqrt{2}} a e^{-i\varphi}}^{-\lambda^* a}}}_{e^{ikX_\varphi}}\right] e^{-ikX_\varphi}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{dk\, k}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi\, \mathrm{Tr}\left[\rho\, e^{ikX_\varphi}\right] e^{-ikX_\varphi}$$

$$X_{\varphi+\pi} = -X_\varphi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk\, |k|}{2\pi} \int_0^{\pi} d\varphi\, \underbrace{\mathrm{Tr}\left[\rho\, e^{ikX_\varphi}\right]}_{\int dx' \langle x'|\rho\, e^{ik\overset{x'}{X_\varphi}}|x'\rangle} e^{-ikX_\varphi} =$$

calcolo Tr sugli autost di X_φ

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk\, |k|}{2\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \int dx' \underbrace{\langle x'|\rho|x'\rangle}_{p(x'|X_\varphi)} e^{ikx'} e^{-ikX_\varphi}$$

regola di Born

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, p(x'|X_\varphi) \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk\, |k|}{2} e^{ik(x'-X_\varphi)}}_{\hat{K}_\varphi(x')}$$

dati sperimentali
misura quadratura X_φ

$$= \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, p(x'|X_\varphi)\, \hat{K}_\varphi(x') = \rho$$

dalla distribuz di prob sperimentale $p(x'|X_\varphi)$

di ciascuna quadrature $X_\varphi = -X_{\varphi+\pi}$

ottengo lo stato ρ

tomografia → misuro su N copie del sisteme le quadrature X_φ. Dalla distribuz sperimentale ottengo ρ

procedure tomografiche analoghe esistono per altri sistemi