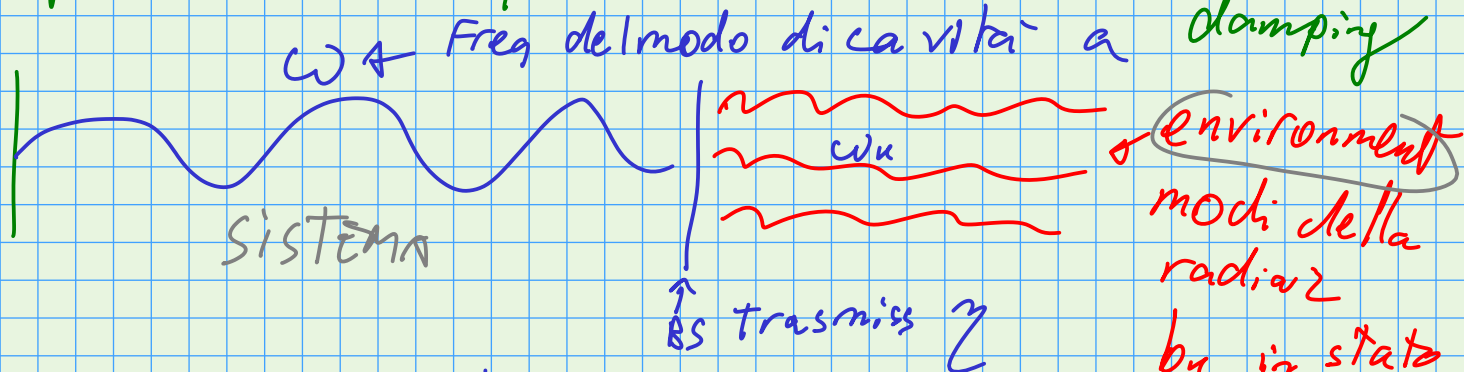


OTTICA 9 10/12/20

esempio di Master eq: Cavità di Fabry-Perot con damping



$H_{interaz} =$ ham del Beam Splitter

$$H \propto a b_k^\dagger + a^\dagger b_k \quad \& \text{accoppiam tra } a, b_k$$

$H_{interaz}$ totale

$$H_{SE}^I(t) = \hbar \sum_k g_k \left[b_k^\dagger e^{+i\omega_k t} a e^{-i\omega t} + a^\dagger b_k e^{i(\omega - \omega_k)t} \right]$$

$\uparrow \propto \text{arctg} \sqrt{\gamma^{-1} - 1}$ $\rightarrow b_-$ $\downarrow b_+$

ogni modo b_k è nello st termico

la Ham è formalmente identica a Jaynes Cummings se $a \rightarrow b_-$
 $a^\dagger \rightarrow b_+$

nella procedura di derivaz della Meq per atomo a 2 livelli, non abbiamo usato le proprietà di b_{\pm}

Usiamo la stessa procedura di ieri \rightarrow

$$\text{meq} \quad \frac{d\rho_s^I}{dt} = \Gamma \left[\bar{n} D[a^\dagger] \rho + (\bar{n} + 1) D[a] \rho \right]$$

$$(\text{meq di ieri}) \quad \frac{d\rho_{\text{scat}}^I}{dt} = \Gamma \left[\bar{n} D[b_+] \rho + (\bar{n} + 1) D[b_-] \rho \right]$$

↓
 termine di eccitazione: Un fotone del bagno entra nella cavità → contiene $a^\dagger a$
 Aggiunge un fotone al modo a

↓
 termine che contiene $a f a^\dagger \Rightarrow$ distrugge un fotone della cavità \Rightarrow un fotone che esce dalla cavità

$$\frac{d\rho_{\text{cav}}^I}{dt} = \Gamma \left(\bar{n} D[a^\dagger] \rho_{\text{cav}}^I + (\bar{n} + 1) D[a] \rho_{\text{cav}}^I \right)$$

↑
 equazione operatoriale → si può tradurre in eq differenziale usando le fn di Wigner
 mappe differenziali:

$$a \cdot \rightarrow \alpha + \frac{1-s}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \quad a^\dagger \cdot \rightarrow \alpha^* + \frac{1+s}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \Gamma \left(\bar{n} \left[a^\dagger \rho a - \frac{1}{2} (\rho a a^\dagger + a a^\dagger \rho) \right] + (\bar{n} + 1) \left[a \rho a^\dagger - \frac{1}{2} (\rho a^\dagger a + a^\dagger a \rho) \right] \right)$$

uso la rappres differenziale delle mappe oper

traduco la meq:

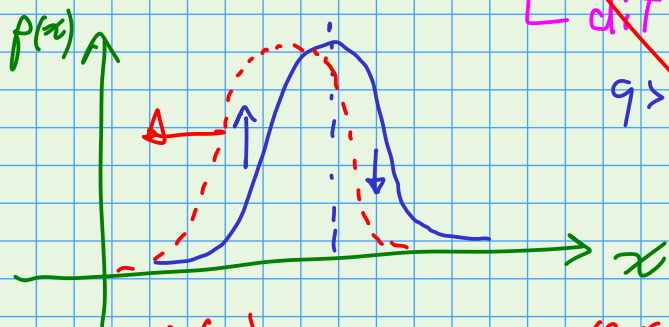
$$\frac{\partial W_s(\alpha)}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[\left(\Gamma(\bar{n} + 1) - \bar{n} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* \right) + \left(\Gamma(\bar{n} + 1)(1-s) + \Gamma \bar{n}(1+s) \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right] W_s(\alpha)$$

eq differenziale di Tipo Fokker-Planck

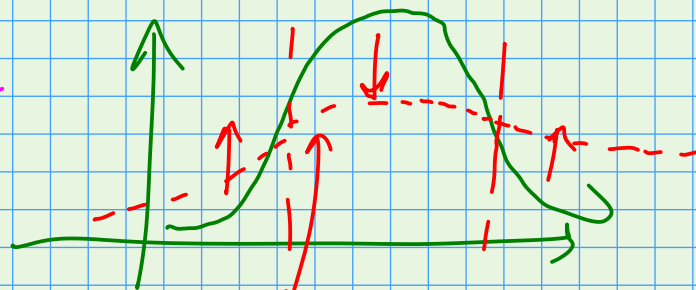
$$\frac{\partial P(x)}{\partial t} = \left(q \frac{\partial}{\partial x} + \frac{d}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) P(x)$$

coeff. di drift
diffusione

$d > 0$



$q > 0$



$P(x)$ si muove verso sx ($q > 0$) per effetto del termine di drift (derivata 1°)

$P(x)$ si sparpaglia

per effetto del termine di diffusione (deriv 2°)

Soluz di eq di Fokker Planck \rightarrow semplice usando la fn di Green: soluz dell'eq differenziale con condiz iniziale $\delta(x - x_0)$

$$P(x, t) = \frac{e^{-\frac{(x-x_0+qt)^2}{2dt}}}{\sqrt{2\pi dt}}$$

si può verificare

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \left(q \frac{\partial}{\partial x} + \frac{d}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) P(x, t)$$

$t \rightarrow 0$ la varianza $\rightarrow 0 \Rightarrow$ gaussiana $\rightarrow \delta$

dalla fn di Green per linearità dell'eq F.P. si può calcolare la soluz finale per \forall cond iniz

$$p(x, t) = \int dx' p(x', 0) g(x - x', t)$$

\uparrow generica $e^{-\frac{x-x_0-x'+qt}{2dt}}$
 \downarrow

vale solo se q, d sono costanti nel tempo

se q e d non sono costanti, li considero costanti in un intervallo dt

$$p(x, t+dt) = \int dx' p(x', t) g(x - x', dt)$$

basta iterare per step dt successivi da t_0 fino al tempo finale

Ricapitolando:

Meq operatoriale $\xrightarrow[\text{Fn W}]{\text{rappres diff}}$ eq di Fokker Planck

→ risolvo usando il metodo Fn di Green con una Fn di Green Gaussiana

Numericamente posso simulare una distribuzione di $p(x)$

METODO MONTECARLO

valori di aspettazione:

$$\langle F \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int dx p(x) F(x) \stackrel{\text{monte carlo}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(x_i)$$

\uparrow legge dei grandi numeri!
 x_i sono numeri distribuiti con prob $p(x)$

$\{x_1 \dots x_N\}$ distribuiti con $p(x)$

usiamo N finito \Rightarrow c'è un errore statistico nel calcolo della media

$$\Delta \bar{F} \approx \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sqrt{\sum_i F^2(x_i) - \left(\sum_i F(x_i)\right)^2}$$

per usare il metodo monte carlo devo avere un set di punti distribuiti con $p(x, t)$

$\hat{=}$ soluz eq
 $\bar{F} = P$

① parto da set di N punti distribuiti con $p(x, t=0)$

metodo della probabilità cumulativa;
permette di calcolare un set di punti distribuiti con prob $p(x, t=0)$ arbitraria

② costruire vettore con prob cumulativa

$$C_x = \int_{-\infty}^x dx' p(x')$$

③ scelgo un numero casuale ϵ con distribuz UNIFORME tra 0 e 1 \forall linguaggio progr

④ scelgo il valore x_i t.c. $\epsilon = C_{x_i}$

⑤ ripeto N volte da ③



↑ punti distribuiti on p

② evoluz dal tempo t al tempo $t + dt$ usando il metodo F_n di Green

$$x_i(t+dt) = x_i(t) + \underbrace{q x_i(t) dt}_{\text{drift}} + \underbrace{C_i}_{\text{diffusione}}$$

set di punti con prob gaussiane con varianza dt

↳ trasla il valor medio di quantita qdt

devo iterare il tutto per passi dt successivi

METODO del QUANTUM JUMP → permette di simulare DIRETTAMENTE la M eq

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] + \sum_m C_m \rho C_m^\dagger - \frac{1}{2} (\rho C_m^\dagger C_m + C_m^\dagger C_m \rho)$$

① uso la "Hamiltoniana" non hermitiana

$$\tilde{H} \stackrel{\text{def}}{=} H - \frac{i}{\hbar} \sum_m C_m^\dagger C_m$$

op Hermit

$$|\Psi(t+\delta t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \tilde{H} \delta t} |\Psi(t)\rangle \approx \left(1 - \frac{i}{\hbar} \tilde{H} \delta t\right) |\Psi(t)\rangle$$

δt piccoli

la norma di $|\Psi\rangle$ non e conservata

$$\langle \Psi(t+\delta t) | \Psi(t+\delta t) \rangle = \langle \Psi(t) | \left(1 + \frac{i}{\hbar} \tilde{H}^\dagger \delta t\right) \left(1 - \frac{i}{\hbar} \tilde{H} \delta t\right) | \Psi(t) \rangle$$

$\langle \Psi(t+\delta t) |$ $| \Psi(t+\delta t) \rangle$

$$\approx \langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle - \delta t \frac{i}{\hbar} \langle \Psi(t) | \tilde{H} - \tilde{H}^\dagger | \Psi(t) \rangle =$$

↑ trascuro δt^2

= $-\frac{i}{\hbar} \sum_m C_m^\dagger C_m$

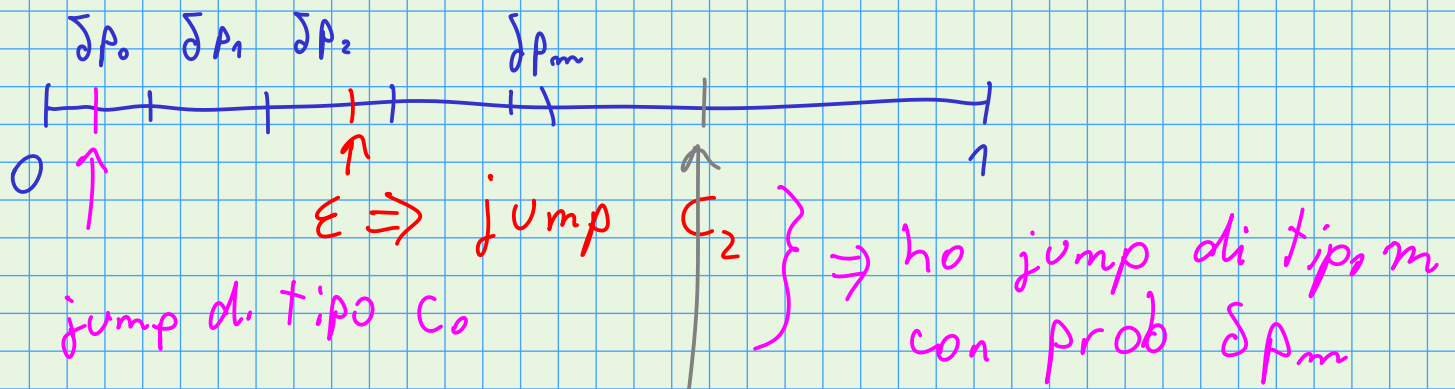
$$= 1 - \underbrace{\left(\delta t \langle \Psi(t) | \sum_m C_m^\dagger C_m | \Psi(t) \rangle \right)}_{\text{difetto di norma}}$$

$\delta p_m \stackrel{\text{def}}{=} \delta t \langle \Psi(t) | C_m^\dagger C_m | \Psi(t) \rangle \leftarrow$ prob di jump di tipo m

jump di tipo m $|\Psi(t+\delta t)\rangle = \frac{C_m |\Psi(t)\rangle}{\langle \Psi(t) | C_m^\dagger C_m | \Psi(t) \rangle}$
normalizzata

② estraggo n. casuale ϵ con distribuz unif tra 0 e 1

ϵ ha prob τ di essere minore di τ



se ϵ finisce fuori dagli

intervallini (con prob $1 - \sum_m \delta p_m$) \Rightarrow nessun jump

$$|\Psi(t+\delta t)\rangle \longrightarrow \frac{|\Psi(t+\delta t)\rangle}{\langle \Psi(t+\delta t) | \Psi(t+\delta t) \rangle^{1/2}}$$

③ ripeto per tutti gli intervalli di tempo

$|\Psi_0\rangle \rightarrow |\Psi(\delta t)\rangle \rightarrow |\Psi(2\delta t)\rangle \rightarrow \dots$ fino al tempo finale

Costruisco una "storia" $|\Psi(t)\rangle$ $t \in [t_{iniz}=0, t_{fin}]$

storia i -esima $|\Psi_i(t)\rangle$

(3) ripeto tutto il procedimento N volte \Rightarrow

ho N storie $|\Psi_i(t)\rangle \quad i=1 \dots N$

la master eq è risolta!

$$f(t) \approx \frac{1}{N} \sum_i |\Psi_i(t)\rangle \langle \Psi_i(t)| \quad \leftarrow \text{media sulle storie}$$

\uparrow soluz della master eq

Dimostriamo che $f(t)$ è soluz della M eq:

$$f(t + \delta t) = \frac{1}{N} \sum_i |\Psi_i(t + \delta t)\rangle \langle \Psi_i(t + \delta t)| \quad \begin{matrix} = \\ \uparrow \\ \text{algoritmo} \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_i \left(\sum_m \delta p_m \frac{C_m |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)| C_m^\dagger}{\langle \Psi(t) | C_m^\dagger C_m | \Psi(t) \rangle} + \right)$$

\uparrow
con prob $\delta p_m \rightarrow$ jump di tipo m

$$+ \left(\underbrace{1 - \sum_m \delta p_m}_{\text{prob di no jump}} \frac{|\Psi_i(t + \delta t)\rangle \langle \Psi_i(t + \delta t)|}{\langle \Psi_i(t + \delta t) | \Psi_i(t + \delta t) \rangle} \right) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_i \sum_m \delta t C_m |\Psi_i(t)\rangle \langle \Psi_i(t)| C_m^\dagger + |\Psi_i(t + \delta t)\rangle \langle \Psi_i(t + \delta t)|$$

$\underbrace{\quad}_{f(t)} \quad \quad \quad \underbrace{\quad}_{f(t)}$

$$= \frac{1}{N} \sum_i \sum_m \delta t C_m |\Psi_i(t)\rangle \langle \Psi_i(t)| C_m^\dagger + \left(1 - \frac{i}{\hbar} H \delta t\right) |\Psi_i(t)\rangle \langle \Psi_i(t)|$$

$$\rho \left(1 + \frac{i}{\hbar} \tilde{H} \delta t \right) = \delta t \sum_m C_m \rho(t) C_m^\dagger + \left(1 - \frac{i}{\hbar} \tilde{H} \delta t \right) \rho(t) \left(1 + \frac{i}{\hbar} \tilde{H} \delta t \right)$$

$$= \delta t \sum_m C_m \rho(t) C_m^\dagger + \rho(t) - \frac{i}{\hbar} \delta t \left(\tilde{H} \rho - \rho \tilde{H}^\dagger \right) =$$

$$= \delta t \sum_m C_m \rho C_m^\dagger + \rho(t) - \frac{i}{\hbar} \delta t [H, \rho] - \frac{1}{2} \delta t \left(\rho C_m^\dagger C_m + C_m^\dagger C_m \rho \right)$$

$$= \rho(t + \delta t)$$

$$-\frac{i}{\hbar} [H, \rho] + \sum_m C_m \rho C_m^\dagger - \frac{1}{2} \left(\rho C_m^\dagger C_m + C_m^\dagger C_m \rho \right) =$$

$$\frac{\rho(t + \delta t) - \rho(t)}{\delta t} \underset{\delta t \rightarrow 0}{\sim} \frac{d\rho(t)}{dt}$$

M eq

a livello concettuale \rightarrow si può interpretare la master eq come una media su evoluzioni successive (storie) ciascuna delle quali ha dei quantum jumps C_m a tempi diversi;

esperimenti che riescono a vedere i q jump e mediando le storie $\rightarrow \rho$ della master eq il sistema interagisce con l'environment mediante jumps discreti \rightarrow Nature 446, 297 (2007)