OTTICA Q 3/12/20

OPEN Q SYSTEMS

→ def sist aperto è sistema in interaz con una riserva (ambiente, environment) "grande" → non viene modificato
bagno apprezzabilmente

→ vogliamo descriz dinamica di solo sistema

$$\rho_S' = \mathrm{Tr}_B \left[U \rho_S \otimes \rho_B U^\dagger \right]$$

↗ output dato input

tempo discreto → generalizz dell'evoluz unitaria
→ CP mappe

" continuo → stato a tutti i tempi
generaliz dell'eq Schr → master eq

TEMPO DISCRETO → Q OPERATIONS : trasf più generale fisicam permessa

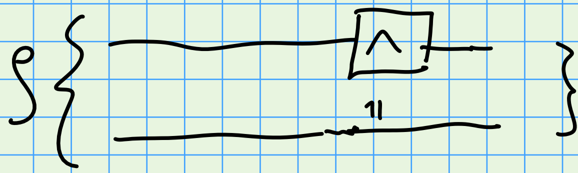
Λ è q. operation $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$
1. Λ è operaz lineare
2. Conserva la traccia $\mathrm{Tr}\left[\Lambda[\rho]\right] = 1$
3. $\Lambda[\rho]$ è completam positiva

1 → linearità della MQ

2 → conservaz traccia → conservaz della prob

3 → completa positività assicura che lo st di uscita è uno stato

Λ è CP $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $(\mathbb{1}_m^{\forall} \otimes \Lambda)[\rho]$ è op positivo



uscita deve essere sempre positiva

CP $\Rightarrow$ Positività $\Lambda[\rho]$ è positivo

$\exists$ mappe $\Lambda[\rho]$ è positivo ma $(\mathbb{1} \otimes \Lambda)[\rho]$ non è positivo

CNES per completa positività $\longrightarrow$ t. di KRAUS

$$\Lambda \text{ è CP} \iff \exists K_\mu \text{ t.c. } \Lambda[\rho] = \sum_\mu K_\mu \rho K_\mu^\dagger$$

K_μ op di Kraus

trasf unitarie sono CP : $\rho' = U \rho U^\dagger$

$$\Lambda \text{ è TRACE PRESERVING} \iff \sum_\mu K_\mu^\dagger K_\mu = \mathbb{1}$$

$$\Lambda \text{ è TP} \overset{def}{\iff} \mathrm{Tr}\big[\Lambda[\rho]\big] = 1$$

$$\mathrm{Tr}\Big[\sum_\mu K_\mu \rho K_\mu^\dagger\Big] = \mathrm{Tr}\Big[\sum_\mu K_\mu^\dagger K_\mu \rho\Big] \overset{\forall \rho}{=} \mathrm{Tr}[\rho]$$

" $\leftarrow$ CNES

$$\iff \sum_\mu K_\mu^\dagger K_\mu = \mathbb{1}$$

RAPPRES di KRAUS di mappa Λ non è univocam determinata

Legame tra postulato di evoluz e quantum op?

$\hookrightarrow$ sist isolato $\rightarrow$ evoluz unit $\rho' = U \rho U^\dagger$

STINESPRING DILATION

Λ è TP CP Map $\iff$ $\exists$ op U $\exists$ st puro ω t.c. $\Lambda[\rho] = \mathrm{Tr}_E\big[U(\rho \otimes \omega)U^\dagger\big]$

cioè posso vedere una q operation come una evoluz unitaria del sistema + ambiente

evoluz unit di sist + ambiente, guardando solo al sist $(Tr_{\bar{\iota}}) \Rightarrow \Lambda[\rho]$

$\Leftarrow$ avevamo già visto

$\Rightarrow$ un possibile modo di costruire ω, E, U

① scelgo uno sp di Hilbert E con dim d = n. di op Kraus

② scelgo base $|e_\mu\rangle$ di sp Hilbert

$$U(|\psi_s\rangle|\omega\rangle) \stackrel{def}{=} \sum_\mu K_\mu |\psi_s\rangle|e_\mu\rangle$$

(non mi definisce univocamente né U, né $|\omega\rangle$)

$$\rho_S = Tr_{\bar{\iota}}\left[U \rho_{iniz} \otimes |\omega\rangle\langle\omega| U^+\right] = \sum_\mu K_\mu \rho K_\mu^+$$

calcolo Tr_E usando base $|e_\mu\rangle$

TEMPO CONTINUO

$\Lambda_t[\rho]$ è quantum dynamical semigroup $\stackrel{def}{\Longleftrightarrow}$

① $\forall t \geq 0$ $\Lambda_t[\rho]$ è TP CP map (q operation)

② semigruppo $\forall t, s \geq 0$ $\Lambda_t \Lambda_s = \Lambda_{t+s}$

(condiz di Markov)

non invertibilità dell'evoluz di sist aperto

① $\rightarrow$ evoluz più generale possibile

② $\rightarrow$ " è definita a tutti i tempi

MASTER EQUATION

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H,\rho] + \sum_m c_m \rho c_m^+ - \frac{1}{2}\left(c_m^+ c_m \rho + \rho c_m^+ c_m\right)$$

eq Liouville ($\Leftrightarrow$ eq Schroedinger)

NOTAZIONE $\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{L}[\rho]$ $\mathcal{L}$ superoperatore Liouvillian

$$\mathcal{L}[\rho] = -\frac{i}{\hbar}[H,\rho] + \sum_m D(c_m)[\rho]$$

$$D(c)[\rho] = c\rho c^+ - \frac{1}{2}\left(c^+ c\rho + \rho c^+ c\right)$$

superoperatore di Lindblad

Master eq dal q dynamical semigroup:

$$\Lambda_t[\rho] \underset{\text{kraus}}{=} \sum_\mu K_\mu(t)\,\rho\, K_\mu^+(t) = \sum_{\mu k i} \underbrace{c_{\mu i}(t)\, c^*_{\mu k}(t)}_{\chi_{ki}} F_i \rho F_k^+$$

base F_i nello sp di op

$$\boxed{K_\mu(t) = \sum_i F_i\, c_{\mu i}(t)}$$ numero

$K_\mu^+ = \sum_k F_k^+ c^*_{\mu k}$

$$c_{\mu i}(t) = \langle F_i | K_\mu(t)\rangle = \mathrm{Tr}\left[F_i^+ K_\mu(t)\right]$$

scegliamo una base F_i t.c. $F_0 = \mathbb{1}$

$$= \sum_{ki} \chi_{ki}(t)\, F_i \rho F_k^+ = \Lambda_t[\rho]$$

$\chi_{ki}(t) = \sum_\mu c_{\mu i} c^*_{\mu k}$ $\leftarrow$ matrice Hermitiana

$$\frac{d\rho}{dt} = \lim_{\tau\to 0} \frac{\rho(t+\tau) - \rho(t)}{\tau} = \lim_{\tau\to 0} \frac{\Lambda_\tau[\rho(t)] - \rho(t)}{\tau}$$

$$\Lambda_\tau[\rho(t)] = \Lambda_{t+\tau}[\rho(0)] = \rho(t+\tau)$$

$$= \lim_{\tau\to 0} \frac{\sum_{ki} \chi_{ki}(\tau)\, F_i\, \rho\, F_k^\dagger - \rho}{\tau} =$$

$$F_0 = \mathbb{1}$$

$$\sum_{ki} \Gamma_{ki} = \sum_k \Gamma_{k0} + \sum_i \Gamma_{0i} + \Gamma_{00} + \sum_{k,i>0} \Gamma_{ki}$$

metà del termine $\sum_{ki}$ contiene $i=0$, $k=0$

$$= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\Bigg(\left[\frac{1}{2}\left(\chi_{00}(t) - 1\right) + \sum_i \chi_{0i}(t) F_i\right]\rho +$$

$$+ \rho\left[\frac{1}{2}\left(\chi_{00}(t) - 1\right) + \sum_k \chi_{k0}(t) F_k^\dagger\right] + \sum_{k,i>0} \chi_{ki}(\tau) F_i \rho F_k^\dagger \Bigg)$$

$$= A\rho + \rho A^\dagger + \sum_{ik>0} \eta_{ki}\, F_i\, \rho\, F_k^\dagger = \frac{d\rho}{dt}$$

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\tau\to 0} \frac{\left[\frac{1}{2}(\chi_{00} - 1) + \sum_i \chi_{0i}(t) F_i\right]}{\tau}$$

ricordarsi che χ è Hermitiana!

$$\eta_{ki} = \lim_{\tau\to 0} \frac{\chi_{ki}(\tau)}{\tau} \qquad k,i>0$$

$$\mathrm{Tr}\,\rho = 1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\mathrm{Tr}\,\rho = 0 = \mathrm{Tr}\left[\frac{d\rho}{dt}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{Tr}\left[A\rho + \rho A^\dagger + \sum_{ik} \eta_{ik} F_i \rho F_k^\dagger\right] = 0$$

|| ← invarianza permutaz traccia

$$\mathrm{Tr}\left[\left(A + A^\dagger + \sum_{ik} \eta_{ik} F_k^\dagger F_i\right)\rho\right] = 0 \qquad \forall \rho \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow A + A^+ + \sum_{in} \eta_{in} F_n^+ F_i = 0$ ← identifica la parte Hermitiana di A: $A + A^+ = -\sum_{in} \eta_{in} F_n^+ F_i$

la parte antiHermitiana $A - A^+ \overset{def}{=} \left(-\frac{2i}{\hbar}\right) H$ ← Hermitiano

messi apposta perchè H = Hamil.

$$A = \frac{A + A^+}{2} + \frac{A - A^+}{2} = -\sum_{in} \frac{\eta_{in}}{2} F_n^+ F_i - \frac{i}{\hbar} H$$

$$\frac{d\rho}{dt} = A\rho + \rho A^+ + \sum_{ni} \eta_{ni} F_i \rho F_n^+ =$$

$$= \sum_{in} -\frac{\eta_{in}}{2} F_n^+ F_i \rho - \frac{i}{\hbar} H \rho + \rho \sum_{in} - \underbrace{(\eta_{ni} F_n^+ F_i)^+}_{= \eta_{ik} F_i^+ F_n} + \frac{i}{\hbar} H^+ \quad (H^+ = H)$$

$$+ \sum_{ni} \eta_{ni} F_i \rho F_n^+ = \boxed{-\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \sum_{in} \eta_{in} \left[-\frac{1}{2} \left(F_n^+ F_i \rho + \rho F_n^+ F_i \right) + F_i \rho F_n^+ \right]} = \frac{d\rho}{dt}$$

dal confronto con eq Liouville segue H = Hamiltoniana

↳ meq nella forma di Kossakowski

si ottiene la forma di Lindblad se diagonalizzate η_{ni} →

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \sum_j \lambda_j \left[(-)\frac{1}{2} \left(C_j^+ C_j \rho + \rho C_j^+ C_j \right) + C_j \rho C_j^+ \right]}$$

M. equation con un approccio fenomenologico:
(discussione fisica) → chiarisce le ipotesi perché si abbia
un q dyn. semigroup:

① disaccoppiam iniziale
$$\rho_{SE}(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_E(0)$$
② accoppiam debole tra sistema
e riserva (approx di Born)
③ approx di MARKOV:
scala di tempi environment
molto più veloce di sistema

⟹ M eq
di Born - Markov

$$\frac{d\rho^I}{dt} \doteq -\frac{1}{\hbar^2} \mathrm{Tr}_E \int_0^t d\tau \left[H_{SE}^I(t), \left[H_{SE}^I(\tau), \rho_S^I(t) \otimes \rho_E \right]\right]$$

vedremo come si lega alla forma di Lindblad

dim:
eq Liouville per SE che è un sist isolato
$$\frac{d\rho_{SE}^I(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \left[H_{SE}^I(t), \rho_{SE}^I(t) \right]$$
pitt interaz $H = H_S + H_E + H_{SE}$

evolvono gli operatori

$$\Rightarrow H_{SE}^I(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(H_S + H_E)t} H_{SE} \, e^{-\frac{i}{\hbar}(H_S+H_E)t}$$
evoluz di op in pitt interaz

integrale di ambo i m

$$\rho^I_{SE}(t) - \rho^I_{SE}(0) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau \left[H^I_{SE}(\tau), \rho_{SA}(\tau)\right]$$

sostituisco in questa

elimino ridefinendo H_S

$$\mathrm{Tr}_E\left[\frac{d\rho^I_{SE}(t)}{dt}\right] = \mathrm{Tr}_E\Big[\cancel{-\frac{i}{\hbar}\left[H^I_{SE}(t), \rho_{SE}(0)\right]} - \frac{1}{\hbar^2}\int_0^t d\tau \times$$

$$\times \left[H^I_{SE}(t), \left[H^I_{SE}(\tau), \rho_{SE}(\tau)\right]\right]\Big]$$

$$\mathrm{Tr}_E\left[H^I_{SE}(t), \underbrace{\rho_{SE}(0)}_{=\rho_S\otimes\rho_E}\right] = \mathrm{Tr}_E\Big[H^I_{SE}\,\rho_S\otimes\rho_E -$$

$$-\rho_S\otimes\rho_E\, H^I_{SE}\Big] = \mathrm{Tr}_E\, H_{SE}\underbrace{(1\!\!1\otimes\rho_E)(\rho_S\otimes 1\!\!1)}_{\rho_S\otimes\rho_E} -$$

$$-\mathrm{Tr}_E(\rho_S\otimes 1\!\!1)(1\!\!1\otimes\rho_E)\,H^I_{SE} = \tilde{H}\rho_S - \rho_S\tilde{H}$$

$$\tilde{H} \stackrel{def}{=} \mathrm{Tr}_E\left[(1\!\!1\otimes\rho_E)\,H^I_{SE}\right]$$

$\Rightarrow$ $\tilde{H}$ è una specie di Hamiltoniana che agisce sul sistema

$\Rightarrow$ posso eliminare il primo termine

ridefinendo $H_S \longrightarrow \tilde{H} + H_S$

$$\boxed{\frac{d\,\mathrm{Tr}_E\,\rho^I_{SE}(t)}{dt} = \frac{d\rho^I_S(t)}{dt} = \frac{1}{\hbar^2}\mathrm{Tr}_E\int_0^t d\tau\left[H^I_{SE}(t), \left[H^I_{SE}(\tau), \rho_{SE}(\tau)\right]\right]}$$