

ST della radiaz

AUTOST delle Q VADRATURE:

$$a_\psi |\lambda_\psi\rangle = \lambda |\lambda_\psi\rangle$$

sono st $\Delta a_\psi^2 = 0 \Rightarrow$ st squeezed con squeezing infinito $\Delta a_\psi = \frac{e^{\pm|\lambda|}}{\sqrt{2}} \quad |\lambda| \rightarrow \infty$

stati non fisici $\langle a^\dagger a \rangle = \text{sh}^2 |\lambda| \xrightarrow{|\lambda| \rightarrow \infty} \infty$

l'analogo degli autostati di posizione \hat{q} o momento \hat{p}
 \rightarrow autost sono non fisici

TWIN BEAM STATE \rightarrow st a due modi, entangled

$$|TB\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{1-|\gamma|^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n |n\rangle_S |n\rangle_I$$

$\gamma \in \mathbb{C}$

\uparrow signal \uparrow idler

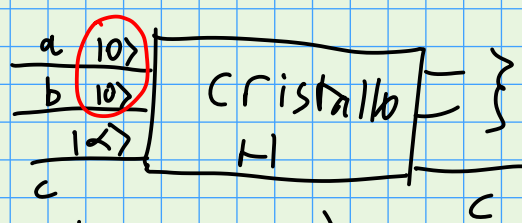
$$\approx \underbrace{|00\rangle + \gamma |11\rangle}_{\text{Entanglement tra modi S, I}}$$

sono st entangled perche non lo posso scrivere $|TB\rangle \neq |\psi\rangle_S |\phi\rangle_I$

generazione del twin \rightarrow spontaneous parametric down-conversion (SPDC)

cristallo $\chi^{(2)}$

$H \propto \chi^{(2)} (a^\dagger b^\dagger c + abc^\dagger)$
 in RWA $\approx \chi^{(2)} (a^\dagger b^\dagger + abc^\dagger)$



$$|TB\rangle = e^{\xi a^\dagger b^\dagger - \xi^* ab} |10\rangle_S |10\rangle_I$$

$\uparrow U = e^{-\frac{i}{\hbar} H t}$
 ξ contiene t, \hbar, α, χ^2

BCH di $su(1,1) \rightarrow K_+ \stackrel{\text{def}}{=} a^\dagger b^\dagger = K_-^\dagger$

$$K_z = \frac{1}{2} (a^\dagger a + b^\dagger b + 1)$$

soddisfano all'algebra $su(1,1)$ $[K_+, K_-] = -2K_z$
 $[K_z, K_\pm] = \pm K_\pm$ $[a, a^\dagger] = 1, [b, b^\dagger] = 1, [a, b] = 0$

$e^{\xi a^\dagger b^\dagger - \xi^* ab}$

$\gamma = \frac{\xi}{|\xi|} + i|\xi|$

$10 \rangle 10 \rangle = e^{\gamma a^\dagger b^\dagger} (ch |\xi|)^{-1} e^{-\gamma^* ab} |0 \rangle_a |0 \rangle_b$

$\frac{1}{2K_z} (a^\dagger a + b^\dagger b + 1)$

BCH $su(1,1)$

$$(ch |\xi|)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{n!} a^{\dagger n} b^{\dagger n} |0 \rangle_a |0 \rangle_b = \sqrt{n!} |n \rangle_a |n \rangle_b$$

$$(ch |\xi|)^{-1} \sum_n \gamma^n |n \rangle |n \rangle = \sqrt{1 - |\xi|^2} \sum_n \gamma^n |n n \rangle = |TBS \rangle$$

$\frac{1}{ch |\xi|} = \sqrt{1 - \frac{|\hbar^2 |\xi|^2}{|\xi|^2}}$

Hyperentanglement \rightarrow ho entanglement su molti gradi di libertà
 \rightarrow entanglement tra modi sul n di fotoni

sulla frequenza-tempo
 sul modo \vec{k} della radiazione
 sulla polarizzazione

SPDC si può fare in vari modi:

type I \rightarrow se a, b sono modi con uguale polariz

type II \rightarrow " " " " " polariz \perp

collineare \rightarrow se a, b hanno lo stesso vettore \vec{k}

non collineare \rightarrow " " " \vec{k} diversi

• STATO TERMICO finora abbiamo visto st puri termico \rightarrow misto

$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \rho_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ \rightarrow st $|\psi_i\rangle$ con prob ρ_i

st puri sono t.c. $[\rho^2 = \rho]$ perché $\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \Leftrightarrow \rho^2 = \rho$

$\rho_{\text{th}} \stackrel{\text{def}}{=} (1 - e^{-\beta}) e^{-\beta a^\dagger a} = \sum_m \left(\frac{\bar{n}^m}{(1 + \bar{n})^m} \right) |m\rangle\langle m| =$
 $\stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{d\alpha^2}{\pi \bar{n}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{\bar{n}}} |\alpha\rangle\langle\alpha|$

\uparrow convoluzione gaussiana di coerenti

$\bar{n} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tr}[a^\dagger a \rho_{\text{th}}] = \langle a^\dagger a \rangle$ $\beta = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$ $\omega = \text{freq modo}$
 $k_B = \text{cost Boltzmann}$
 $T = \text{temperatura}$

def ρ_{th} è lo stato della radiazione emessa da una sorgente all'equilibrio termico a temperatura T

(radiazione di corpo nero)
 termodinamica statistica: st di sist all'equil termico \rightarrow ensemble canonico

$\rho_{\text{th}} = \frac{e^{-H/kT}}{\text{Tr}[e^{-H/kT}]} = \frac{e^{-\frac{\hbar\omega a^\dagger a}{kT} - \frac{\hbar\omega}{kT} \frac{1}{2}}}{\text{Tr}[e^{-\frac{\hbar\omega a^\dagger a}{kT}}]} e^{-\beta \frac{\hbar\omega}{2}}$

$\stackrel{\text{def}}{=} (1 - e^{-\beta}) e^{-\beta a^\dagger a} = \text{Tr}[e^{-\beta a^\dagger a}] = \sum_n \langle n| e^{-\beta a^\dagger a} |n\rangle = \sum_n e^{-\beta n} = \frac{1}{1 - e^{-\beta}}$

$\stackrel{\text{def}}{=} (1 - e^{-\beta}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n} |n\rangle\langle n|$
 Sviluppo spettrale $f(a^\dagger a) = \sum_n f(n) |n\rangle\langle n|$

$$\bar{n} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tr}[\rho_{\text{th}} a^\dagger a] = \underbrace{(1 - e^{-\beta})}_{\rho_{\text{th}}} \underbrace{\text{Tr}[e^{-\beta a^\dagger a} a^\dagger a]}_{\frac{\partial}{\partial \beta} e^{-\beta a^\dagger a}}$$

$$= (1 - e^{-\beta}) \underbrace{\left(-\frac{\partial}{\partial \beta}\right) \text{Tr}[e^{-\beta a^\dagger a}]}_{\frac{1}{1 - e^{-\beta}}} = (1 - e^{-\beta}) \left(-\frac{\partial}{\partial \beta}\right) \frac{1}{1 - e^{-\beta}}$$

$$= \frac{1 - e^{-\beta}}{(1 - e^{-\beta})^2} e^{-\beta} = \frac{1}{e^\beta - 1} = \bar{n} \Rightarrow \frac{1}{\bar{n}} = e^\beta - 1 \Rightarrow e^{-\beta} = \left(\frac{1}{\bar{n} + 1}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow e^{-\beta} = \frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1}$$

$$\rho_{\text{th}} = (1 - e^{-\beta}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n} |n\rangle\langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{(\bar{n} + 1)^{n+1}} |n\rangle\langle n|$$

$$\downarrow \frac{1}{\bar{n} + 1}$$

$$|x\rangle = e^{-\frac{|x|^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle$$

$$\textcircled{3} \rightarrow \int \frac{d^2 \alpha}{\pi \bar{n}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{\bar{n}}} |\alpha\rangle\langle \alpha| = \int \frac{d^2 \alpha}{\pi \bar{n}} e^{-|\alpha|^2 \left(\frac{1}{\bar{n}} + 1\right)} \sum_{m,k=0}^{\infty} \frac{\alpha^m \alpha^{*k}}{\sqrt{m!k!}} |m\rangle\langle k|$$

$$= \int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\pi \bar{n}} e^{-\rho^2 \left(\frac{1}{\bar{n}} + 1\right)} \sum_{m,k} \frac{\rho^{m+k}}{\sqrt{m!k!}} e^{i\varphi(m-k)} |m\rangle\langle k|$$

$\rightarrow 2\pi \delta_{m,k}$

$$= \int_0^{+\infty} d\rho \frac{1}{\bar{n}} e^{-\rho^2 \left(\frac{1}{\bar{n}} + 1\right)} \sum_k \frac{\rho^{2k}}{k!} |k\rangle\langle k|$$

$$= \int_0^{+\infty} d\rho \frac{1}{\bar{n}} e^{-\rho^2 \left(\frac{1}{\bar{n}} + 1\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^{2k}}{k!} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\bar{n}}\right)^k} |k\rangle\langle k|$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^k}{\bar{n} + 1} \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1}\right)^k \frac{1}{\bar{n}} |k\rangle\langle k| = \rho_{\text{th}}$$

per radiaz visibile $\bar{n} = \langle a^\dagger a \rangle_{\text{th}}$ e' molto piccolo tipicamente

$$k_B \sim 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$$

$$h \sim 10^{-34} \text{ J s}$$

$$\omega \sim 10^{15} \text{ Hz}$$

$$\left. \begin{array}{l} k_B \sim 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \\ h \sim 10^{-34} \text{ J s} \\ \omega \sim 10^{15} \text{ Hz} \end{array} \right\} \Rightarrow T \sim 10^3 \quad \beta \sim 10$$

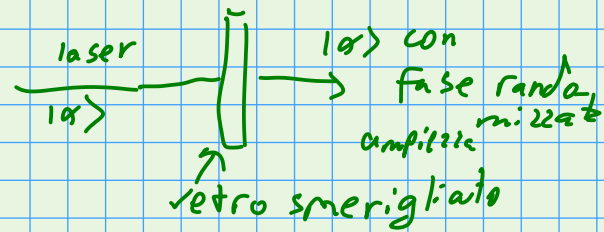
$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\beta-1}} \sim 10^{-5}$$

si vede la lampadina \rightarrow ha moltissimi modi

1 fotone per modo $\Rightarrow T \sim 10^6 \text{ K}$ (esplosione nucleare?)

Trucco del vetro smerigliato

$$P_{\text{th}} = \int \frac{d^2 \alpha}{\pi \bar{n}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{\bar{n}}} |\alpha \rangle \langle \alpha|$$



Funzione di Wigner del termico \rightarrow e' una Gaussiana centrata nell'origine \rightarrow tranne che $10 \times \Theta |_{\bar{n}} = P_{\text{th}}$

$$P_{\text{th}} \propto \sum_m e^{-\beta m} |m \rangle \langle m|$$

il termico
NON e' uno
st a minime indet

fn di Wigner del coerente $|\alpha \rangle$ e' una Gaussiana centrata in $\alpha \in \mathbb{C}$, e il termico e' una convoluzione Gaussiana di coerenti \Rightarrow per linearita' della Wigner

Wigner del termico e' convoluzione Gaussiana di Gaussiane \Rightarrow e' una Gaussiana

• ST di GATTO, (di Schrödinger)

esperim concettuale gatto in un laboratorio perfettamente

isolato con una boccetta di veleno che si apre se un atomo decade. Aspetto un tempo pari a metà del T di decadimento \Rightarrow l'atomo è in sovrapposiz coerente di $\frac{|decaduto\rangle + |non\ decaduto\rangle}{\sqrt{2}}$

\Rightarrow ha evoluz unitaria (postulato 3 \rightarrow eq Schr)
 \Rightarrow anche il gatto si trova in una sovrapposiz coerente (entangled con l'atomo)

$$\frac{|vivo\rangle |non\ decaduto\rangle + |morto\rangle |decaduto\rangle}{\sqrt{2}}$$

SOVRAPPOSIZ di OGGETTI MACROSCOPICI

\hookrightarrow paradosso \rightarrow non abbiamo esperienza

risoluz secondo Copenhagen: guardo il gatto \Rightarrow non è più isolato \rightarrow no eq Schr \Rightarrow Post misura \rightarrow risultato probabilistico

Punto su cui riflettere: spiegazione fallisce se siamo

noi nella scatola \rightarrow scatola perfettamente isolata in cui ho barattolo e pallina

$$\frac{|0\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

non esiste per Copenhagen \downarrow

Cosa vedete?

$$\frac{|dentro\rangle |0\rangle + |Fuori\rangle |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

Wigner's friend

Stato di gatto \rightarrow sovrapposiz di sistemi macroscopici distinguibili:

in ottica quantistica

$$|\Psi_{\text{gatto}}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle \right) \quad N \sim \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ATTENZIONE: differenza tra sovrapposizione e miscela

$$\text{stato misto} \rightarrow \rho = \frac{1}{2} (|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|)$$

diverso dallo stato di gatto

$$|\Psi_{\text{gatto}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle \right)$$

ampiezza di prob $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Stato puro \Rightarrow rappresenta una proprietà del

Sistema \rightarrow prop complementare \rightarrow interferenza quantistica

stato misto \Rightarrow rappresenta una proprietà con una prob \rightarrow ignoranza

misurare le sovrapposizioni \rightarrow interferometria
quantistica \rightarrow nel caso di Ottica \rightarrow interferometria ottica