# OTTICA Q 17/11/20

OVER
✓ COMPLETEZZA

$$|\alpha\rangle \stackrel{\downarrow}{=} e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$\underbrace{\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha|}_{\hat{O}} = \mathbb{1}$$

CNES per base $|x\rangle$ base $\Leftrightarrow \int dx\, |x\rangle\langle x| = \mathbb{1}$

$\alpha = \rho e^{i\varphi}$

$$\int d^2\alpha \stackrel{\downarrow}{=} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} d\rho\, \rho$$

$\hat{O}|n\rangle = |n\rangle$ $\forall |n\rangle$ st Fock (base)

$\Downarrow$ $O = \mathbb{1}$

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha|n\rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}} e^{-|\alpha|^2/2} =$$

$$= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}} e^{-|\alpha|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|m\rangle}{\sqrt{n!\,m!}} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\pi} \int_0^{+\infty} d\rho\, \rho\, e^{-\rho^2} \underbrace{\rho^{n+m} e^{i\varphi(m-n)}}_{\alpha^{*n}\alpha^m} =$$

$\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i\varphi(m-n)} = \delta_{mn}\, 2\pi$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|m\rangle}{\sqrt{n!\,m!}} \delta_{nm} \underbrace{\int_0^{+\infty} d\rho\, 2\rho\, e^{-\rho^2} \rho^{2n}}_{} = \frac{|n\rangle}{\cancel{n!}} \cancel{n!} = |n\rangle$$

normaliz della Fn $\Gamma$ di Eulero

$$= \int_0^{+\infty} dt\, e^{-t} t^n \stackrel{\downarrow}{=} n!$$

$t = \rho^2 \Rightarrow dt = 2\rho\, d\rho$

$\forall$ st Fock $|n\rangle$

$\Rightarrow \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha| = \mathbb{1}$

$$\Gamma(z) \stackrel{def}{=} \int_0^{+\infty} dt\, e^{-t} t^{z-1} \underset{z\in\mathbb{N}}{=} (z-1)!$$

TRACCIA di op in funzione dei coerenti $Tr[O] \stackrel{\downarrow}{=} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \langle\alpha|O|\alpha\rangle$

$$\mathrm{Tr}[O] \overset{df}{=} \sum_n \langle n|\mathbb{1}O|n\rangle = \sum_n \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \langle n|\alpha\rangle\langle\alpha|O|n\rangle$$

$\mathbb{1} = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha|$

$|n\rangle$ base dello sp Hilbert $\Leftrightarrow \sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{1}$

$$= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \langle\alpha|O\underbrace{\left(\sum_n |n\rangle\langle n|\right)}_{=\mathbb{1}}|\alpha\rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \langle\alpha|O|\alpha\rangle$$

# LIMITE CLASSICO dell'OTTICA QUANTISTICA con i coerenti

lim classico → campo elettrico e magnetico dell'onda elm quantizzata siano (più o meno) ben definiti a tutti i tempi e in tutte le posizione

cioè → eliminare per quanto possibile l'effetto della complementarità e indeterminazione

idea → usare st coerenti che sono stati a minima indet per le quadrature

↳ legate a campo el e campo magnetico

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{k\sigma} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3 \omega}}\, \vec{e}_{k\sigma} \left(a_{k\sigma} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + h.c.\right)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \underset{e^{i\frac{\pi}{2}}}{(-i)} \sum_{k\sigma} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 L^3}}\, \vec{e}_{k\sigma} \left(a_{k\sigma} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} - a^+_{k\sigma} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}\ldots}\right)$$

↑ gauge Coulomb

$+i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$= \sum_{k\sigma} \sqrt{\phantom{x}}\, \vec{e} \left(\underbrace{a_{k\sigma} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t - \frac{\pi}{2})} + a^+ e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t - \frac{\pi}{2})}}_{\text{quadratura}}\right)$$

$$= \sum_{k\sigma} \vec{\alpha}_{k\sigma} X_{\varphi = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t - \frac{\pi}{2}}$$

al variare di $\vec{r}, t$ cambio la quadratura

$$\Delta X_\varphi \, \Delta X_{\varphi+\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow |\alpha\rangle \text{ st a minima indet}$$

$\Delta X_\varphi$ è cost $\forall \varphi$

$\Delta E$ è minima ed è cost in $t$ e uniforme in $\vec{r}$

campo magnetico $\rightarrow$ analoga

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \sum_{k\epsilon} \sqrt{\cdots}\; \vec{e}_{k\epsilon} \left( a\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + h.c. \right)$$

$$= \sum_{k\epsilon} \sqrt{\cdots}\; i \vec{k} \times \vec{e}_{k\epsilon} \left( a\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} - a^+ e^{-i\cdots} \right)$$

$$= \sum_{k\epsilon} \vec{B}_{k\epsilon} \; X_{\varphi = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t - \frac{\pi}{2}}$$

$$\langle E \rangle = \langle \alpha | E | \alpha \rangle = \sum_{k\epsilon} \vec{\alpha}_{k\epsilon} \langle \alpha | X_\varphi | \alpha \rangle =$$

$X_\varphi = a e^{i\varphi} + a^+ e^{-i\varphi}$

$$= \sum_{k\epsilon} \vec{\alpha}_{k\epsilon} \left( \alpha e^{i\varphi} + \alpha^* e^{-i\varphi} \right) \Leftarrow \text{le ampiezze}$$

$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

$\langle \alpha | a^+ = \alpha^* \langle \alpha |$

COERENTI $\rightarrow$ limite classico teorie quantistiche

es particella libera $\longrightarrow$ uso st coerenti di Schroedinger

$x \propto a + a^+$

$p \propto -i(a - a^+)$

st a minima indet t.c. $\Delta x \, \Delta p = \frac{\hbar}{2}$ $\qquad \Delta x = \Delta p = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}$

$\Rightarrow$ st dove sia la posiz che il momento sono più o meno definiti $\Leftrightarrow$ se faccio misure con precis

$\Delta x^2_{mis} \gg \Delta x^2$ varianza coerente

$\Delta p^2_{misur} \gg \Delta p^2$ " "

$\exists$ st coerenti di spin $\to$ stati in cui le 3 componenti del momento angolare (complementari) sono più o meno definite

LIMITE CLASSICO di TEORIA QUANT

ⓐ usare st coerenti $\to$ le proprietà complem sono più o meno definite

ⓑ usare il t. di Ehrenfest $\to$ le eq di moto classiche si ottengono dall'eq Schrödinger per i valori di aspettazione degli osserv

ⓑ $\to$ valori di aspettaz (dinamica)

ⓐ $\to$ precisione o indet

FUNZIONI di WIGNER → rappresentazione in termini di stati coerenti

tutti gli stati e gli osservabili diventano numeri complessi e operatori differenziali

→ facciamo ottica q ⇒ coerenti dell'osc armonico

ma ∃ fn di Wigner per tutti i sistemi quantistici

def fn di HUSIMI (o rappres Q della mat densità)

$$Q(\alpha) \stackrel{def}{=} \frac{\langle \alpha | \rho | \alpha \rangle}{\pi}$$ ← el di mat diagonale sui coerenti

$\langle n | \rho | n \rangle$ non identifica $\rho$ univocamente

$\langle \alpha | \rho | \alpha \rangle$ identifica $\rho$ univocam

$$\rho \geq 0 \Rightarrow Q \geq 0 \quad \forall \alpha$$

regola di Born ⇒ Q è la $\frac{\text{prob}}{\pi}$ che lo st $\rho$ sia il coerente $|\alpha\rangle$

$$\int d^2\alpha \; Q(\alpha) = 1$$

$$Tr[\rho] = 1 = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle = \int d^2\alpha \; Q(\alpha)$$

def fn di GLAUBER-SUDARSHAN $P(\alpha)$ rappresentaz P di $\rho$

$$\rho \stackrel{def}{=} \int d^2\alpha \; P(\alpha) \; |\alpha\rangle\langle\alpha|$$

se i coerenti fossero una base $P = Q$

$P(\alpha)$ non è positivo in genere è una distribuz

$$\rho = |\beta\rangle\langle\beta| \Rightarrow P(\alpha) = \delta^{(2)}(\alpha - \beta)$$

$|\psi\rangle$ è st classico $\overset{def}{\Longleftrightarrow} P(\alpha) \geq 0$ (coerenti e misture di coerenti → st termico)

$$\int d^2\alpha \, P(\alpha) = 1$$

$$\underset{1}{Tr[\rho]} \overset{def}{=} Tr\left[\int d^2\alpha \, P(\alpha) \, |\alpha\rangle\langle\alpha|\right] =$$

$$= \int d^2\alpha \, P(\alpha) \, \underbrace{Tr\left[|\alpha\rangle\langle\alpha|\right]}_{1} = \int d^2\alpha \, P(\alpha)$$

Legame tra P e Q:

$$Q(\alpha) = \int \frac{d^2\beta}{\pi} P(\beta) \, e^{-|\alpha-\beta|^2}$$ ← convoluz gaussiana in $\mathbb{C}$

$$Q(\alpha) \overset{def}{=} \frac{\langle\alpha| \rho |\alpha\rangle}{\pi} = \langle\alpha| \left(\int \frac{d^2\beta}{\pi} P(\beta) \, |\beta\rangle\langle\beta|\right) |\alpha\rangle =$$

$$= \int \frac{d^2\beta}{\pi} P(\beta) \, |\underbrace{\langle\alpha|\beta\rangle}_{e^{-|\alpha-\beta|^2}}|^2$$

TF di CONVOLUZ è PRODOTTO di T.F.

$$\Rightarrow \mathcal{F}[Q] = \mathcal{F}[P] \, \mathcal{F}\left[e^{-|\alpha|^2}\right]$$

$$\Rightarrow P = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathcal{F}[Q]}{\mathcal{F}\left[e^{-|\alpha|^2}\right]}\right]$$

TF in campo complesso e $\delta$ Dirac in campo compl

$$\delta^{(2)}(\alpha) \stackrel{def}{=} \int \frac{d^2\lambda}{\pi^2}\, e^{\lambda\alpha^* - \alpha\lambda^*} \equiv \delta(\mathrm{Re}(\alpha))\,\delta(\mathrm{Im}(\alpha))$$

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2\pi}\, e^{\pm i x t}$$

$$\int \frac{d^2\lambda}{\pi^2}\, e^{\overbrace{\lambda\alpha^* - \lambda^*\alpha}^{=iy}} =$$

$$= \int \frac{dx\,dy}{\pi^2}\, e^{[(x+iy)(a+ib) - (x-iy)(a+ib)]} =$$

$\lambda = x+iy$

$\alpha = a+ib$

$x' = 2x \quad y' = 2y \quad dx = \frac{dx'}{2}$

$$= \int \frac{dx\,dy}{\pi^2}\, e^{2i(ya - bx)} = \int \frac{dx'\,dy'}{4\pi^2}\, e^{iy'a}\, e^{-ix'b}$$

$$= \delta(a)\,\delta(b) = \delta(\mathrm{Re}(\alpha))\,\delta(\mathrm{Im}(\alpha))$$

Trasformata di Fourier (TF) in $\mathbb{C}$:

$$\tilde{f}(\alpha) \stackrel{def}{=} \int d^2\lambda\; e^{\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda} f(\lambda)$$

TF di $f$

anti TF

$$f(\lambda) = \int \frac{d^2\alpha}{\pi^2}\, e^{-(\alpha\lambda^* - \lambda\alpha^*)}\, \tilde{f}(\alpha)$$

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi^2}\, e^{-(\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda)}\, \tilde{f}(\alpha) \stackrel{def}{=} \int \frac{d^2\alpha}{\pi^2}\, e^{-(\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda)} \int d^2\lambda'\, e^{\alpha\lambda'^* - \alpha^*\lambda'}\, f(\lambda')$$

$$= \int d^2\lambda' \int \frac{d^2\alpha}{\pi^2} f(\lambda')\, e^{\alpha(\lambda'-\lambda)^* - \alpha^*(\lambda'-\lambda)} =$$

$$\text{"} \delta(\lambda-\lambda') \text{"}$$

$$= \int d^2\lambda' \, \delta(\lambda-\lambda') f(\lambda') = f(\lambda)$$

Significato di P e Q:

P funziona come "probabilità" per valori di aspettazione normalmente ordinati

def ordinamento normale $:f(a,a^+): \stackrel{def}{=}$ scrivo f mettendo $a^+$ a sinistra e a a destra dimenticando i commutatori

$$:a a^+: = a^+ a \qquad :a^+ a: = a^+ a$$

$$:f(a,a^+): = \; :a a^+ a^2 a^+: = a^{+2} a^3$$

$$\langle O \rangle = \int dx \, p(o_x) \, o_x$$

$$\underbrace{\langle a^{+n} a^m \rangle = \int d^2\alpha \, P(\alpha) \, \alpha^{*n} \alpha^m}$$

$$\langle a^{+n} a^m \rangle = \mathrm{Tr}\big[\underset{\text{"} \int d^2\alpha \, P(\alpha) |\alpha\rangle\langle\alpha| \text{"}}{\rho} \, a^{+n} a^m\big] =$$

$$= \mathrm{Tr}\Big[\int d^2\alpha \, P(\alpha) \, |\alpha\rangle \underbrace{\langle\alpha| a^{+n}}_{=\alpha^{*m}\langle\alpha|} \underbrace{a^m}_{=\alpha^m}\Big]$$

invarianza permutaz ciclica Tr

$$= \int d^2\alpha \; P(\alpha)\, \alpha^n \alpha^{*m} \; \underbrace{\mathrm{Tr}\left[\,|\alpha\rangle\langle\alpha|\,\right]}_{=1}$$

Q si comporta come probabilità per val di aspettaz di fn antinormalmente ordinate

def ordinamento antinormale $:f(a, a^\dagger):_A$ = scrivere $f$ con $a^\dagger$ a destra e $a$ sx

$$:a^\dagger a:_A = a a^\dagger \qquad :a a^\dagger:_A = a a^\dagger$$

$$\langle a^n a^{\dagger m} \rangle = \int d^2\alpha \; Q(\alpha)\, \alpha^n \alpha^{*m}$$

$$\langle a^n a^{\dagger m} \rangle = \mathrm{Tr}\left[\rho\, a^n \overset{\text{ipct}}{a^{\dagger m}}\right] = \mathrm{Tr}\left[a^{\dagger m} \rho\, a^n\right] =$$

$$= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \underbrace{\langle\alpha| a^{\dagger m}}_{\alpha^{*m}\langle\alpha|} \rho \underbrace{a^n |\alpha\rangle}_{=\alpha^n|\alpha\rangle} = \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\, \alpha^{*m} \alpha^n \underbrace{\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle}_{Q(\alpha)}$$

$$\mathrm{Tr}\,\cdot = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \langle\alpha|\cdot|\alpha\rangle$$

$$= \int d^2\alpha \; Q(\alpha)\, \alpha^{*m} \alpha^n$$

FUNZIONE CARATTERISTICA di una distribuz $p(x)$

def : $\chi(t) \overset{\text{def}}{=} \int dx\, p(x)\, e^{itx}$ TF di $p(x)$

P, Q in termini fn caratteristica

$$\chi(\lambda, s) \overset{def}{=} \mathrm{Tr}\left[\rho\, e^{\lambda a^+ - \lambda^* a}\right] e^{\frac{s}{2}|\lambda|^2} = \langle D(\lambda)\rangle e^{\frac{s}{2}|\lambda|^2}$$

$s \in \mathbb{R}$

$$D(\lambda) = e^{\lambda a^+ - \lambda^* a} \underset{\text{BCH di WH}}{=} e^{\lambda a^+} e^{-\lambda^* a} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2}$$

normalm ordin

$$= e^{-\lambda^* a} e^{\lambda a^+} e^{+\frac{|\lambda|^2}{2}}$$

antinorm ordinata

$$\chi(\lambda, \underset{1}{s}) = \langle : D(\lambda) : \rangle$$

$$\chi(\lambda, s=-1) = \langle : D(\lambda) :_A \rangle$$

Vedremo che $\chi \begin{cases} s=1 \\ s=-1 \end{cases}$ è la fn caratter di $\begin{matrix} P & s=1 \\ Q & s=-1 \end{matrix}$