OTTICA Q 5/11/20

OSCILLAZ di RABI con campo quantizz

$g \to$ cost di accoppiam
possiamo tradurlo in numero reale se mettiamo la fase dentro a

$\cancel{e^{i\omega t}} \to g$

$$|\psi^I(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H_i t}|\psi(0)\rangle$$

$$H_i^{RWA} = \hbar g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)$$

$\sigma_+\sigma_-\sigma_+\sigma_-\dots\sigma_-$ $\qquad [a,a^\dagger]=1$ $\qquad \sigma_-\sigma_+\dots\sigma_+$

pot pari: $$(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)^{2m} = |e_1\rangle\langle e_1|\,(\underbrace{aa^\dagger}_{a^\dagger a+1})^m + |e_0\rangle\langle e_0|\,(a^\dagger a)^m$$

come le z prec $\to$ sopravvivono solo i termini $\sigma_+\sigma_-\sigma_+\sigma_-$

pot dispar: $$(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)^{2m+1} = (a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)\left[|e_1\rangle\langle e_1|(aa^\dagger)^m + |e_0\rangle\langle e_0|(a^\dagger a)^m\right]$$

$$= |e_0\rangle\langle e_1|\,a^\dagger(aa^\dagger)^m + |e_1\rangle\langle e_0|\,a(a^\dagger a)^m$$

$$U = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-igt)^m}{m!}(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)^m = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\overset{(-1)^m}{-i}gt)^{2m}}{(2m)!}\left[|e_1\rangle\langle e_1|(a^\dagger a+1)^m +\right.$$

$$\left.+ |e_0\rangle\langle e_0|(a^\dagger a)^m\right] + \frac{(\overset{(-i)(-1)^m}{-i}gt)^{2m+1}}{(2m+1)!}\left[\underbrace{|e_0\rangle\langle e_1|}_{\sigma_-}a^\dagger(a^\dagger a+1)^m + |e_1\rangle\langle e_0|\,a(a^\dagger a)^m\right]$$

$$= \cos\left(gt\sqrt{a^\dagger a+1}\right)|e_1\rangle\langle e_1| + \cos\left(gt\sqrt{a^\dagger a}\right)|e_0\rangle\langle e_0| -$$

$$- i\left[\sigma_- a^\dagger\frac{\sin\left(gt\sqrt{a^\dagger a+1}\right)}{\sqrt{a^\dagger a+1}} + \sigma_+ a\frac{\sin\left(gt\sqrt{a^\dagger a}\right)}{\sqrt{a^\dagger a}}\right]$$

$$|\psi(0)\rangle = |e_1\rangle\sum_n \beta_n|n\rangle$$

radiaz

$$U|\psi(0)\rangle = |\psi^I(t)\rangle = \sum_n\beta_n\left[|e_1\rangle\cos\left(gt\sqrt{n+1}\right)|n\rangle + 0\right.$$

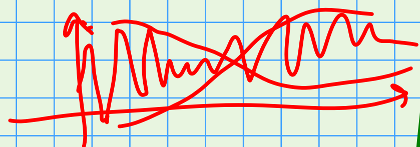
$$\left. - i\,\overset{\sigma_-|e_1\rangle}{|e_0\rangle}\frac{\sin\left(gt\sqrt{n+1}\right)}{\cancel{\sqrt{n+1}}}\,\underbrace{a^\dagger|n\rangle}_{=\cancel{\sqrt{n+1}}|n+1\rangle} + 0\right] =$$

viene dal commut

$$= \sum_n \beta_n \Big(\cos\left(g t \sqrt{n+1}\right) |e_1\rangle |n\rangle - i \sin\left(g t \sqrt{n+1}\right) |e_0\rangle |n+1\rangle \Big)$$

$$= |\psi^I(t)\rangle$$

anche qui ho oscillaz di Rabi, che sono pilotate dallo st della radiaz



cosa succede se la radiaz è nel vuoto $|\psi(0)\rangle = |e_1\rangle|0\rangle$

$\beta_0 = 1$

$$|\psi^I(t)\rangle = \underbrace{\cos(gt)\,|e_1\rangle|0\rangle - i \sin(gt)\,|e_0\rangle|1\rangle}$$

l'eccitaz dell'atomo passa al campo

OTTICA NON LINEARE

materiali dielettrici non magnetici

$$H = \frac{1}{2}\int d^3r\; \vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{B^2}{\mu_0}$$

mat lineari

mat lineari isotropi

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$

spostamento — polarizz

$$\vec{P} = \underbrace{\overleftrightarrow{\chi}\cdot\vec{E}}_{\sum_\beta \chi_{\alpha\beta} E_\beta} = \chi \vec{E}$$

$\cancel{\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \vec{P}}$

$$\vec{P} = \overleftrightarrow{\chi}^{(1)}\cdot\vec{E} + \underbrace{\chi^{(2)} : \vec{E}\,\vec{E}}_{\sum_{\beta\gamma} \chi_{\alpha\beta\gamma} E_\beta E_\gamma = P_\alpha} + \chi^{(3)} \vdots\, \vec{E}\,\vec{E}\,\vec{E} + \dots$$

1° termine non lineare

$$H = \underbrace{\int d^3r\, \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}}_{\text{Ham vuoto}} + \underbrace{\chi^{(1)} : \vec{E}\,\vec{E}}_{\text{è ancora quadratico in } \vec{E}}}_{H_0} + \underbrace{\chi^{(2)} \vdots\, \vec{E}\,\vec{E}\,\vec{E} + \dots}_{H_1}$$

cambia i livelli energetici

H_1 ← Ham di "interazione"

quantizziamo nel vuoto e consideriamo H_1 come una perturbazione $\longrightarrow \boxed{\chi^{(2)} \ll 1}$

$$H_1 = \int d^3r \, \chi^{(2)} E^3 \propto \int d^3r \, \chi^{(2)} \sum_{\substack{n b \\ k' b' \\ k'' c''}} \sqrt{\cdots} \Big(\underbrace{-i a_{k b} e^{i k \cdot r} e^{-i \omega t} + h.c.}_{E} \Big)$$

$$a e^{-i\omega_a t} + a^\dagger e^{+i\omega_a t}$$

$$\underbrace{\left(a_{k'} e^{-\omega_{k'} t}\right)}_{E} \underbrace{\left(a_{k''} e^{\omega_{k''} t}\right)}_{E} \propto \chi^{(2)} \left(\gamma \, a^\dagger b c + \gamma^* a b^\dagger c^\dagger \right)$$

$$\left(b e^{-i\omega_b t} + b^\dagger e^{+i\omega_b t} \right) \left(c e^{-i\omega_c t} + c^\dagger e^{+i\omega_c t} \right)$$

RWA di tutti gli elementi di queste tre somme conservo solo quelli che non oscillano

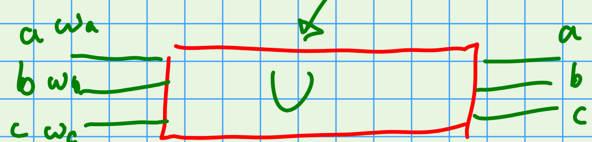
$\boxed{\omega_a = \omega_b + \omega_c} \longrightarrow \boxed{\omega_a - \omega_b - \omega_c = 0}$ RWA

in RWA $\longrightarrow H_1^I(t) = H_1^I \implies |\Psi^I(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H_1^I t} |\Psi(0)\rangle$ $\quad \propto \chi^{(2)} \ll 1$

$$\simeq \left(\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} t H_1^I \right) |\Psi(0)\rangle$$

$\hookrightarrow$ SS 1° ordine di exp $H_1 \propto \chi^{(2)} \ll 1$

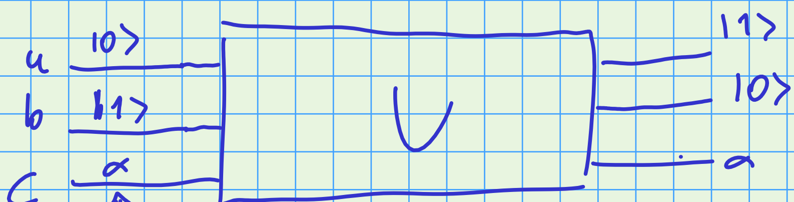
$\hookrightarrow$ l'evoluz della radiaz in materiali con $\chi^{(2)} \neq 0 \longrightarrow$ CRISTALLI NON LINEARI



$$a^\dagger b + a b^\dagger$$

$$H_1 |0\rangle_a |1\rangle_b = |1\rangle |0\rangle + 0 \qquad a|0\rangle = 0$$

FREQ CONVERSION

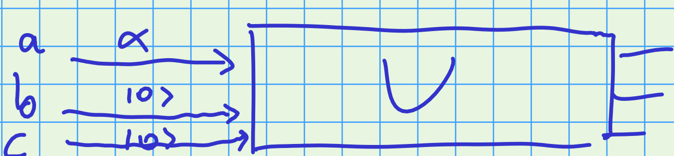


$\hookrightarrow$ campo di POMPA $\rightarrow$ campo classico (stato coerente)

$$|\Psi(t)\rangle \simeq |\Psi(0)\rangle - \frac{it}{\hbar} H_1 |\Psi(0)\rangle$$

$$\simeq |0\rangle_a |1\rangle_b - \frac{it}{\hbar} \chi^{(2)} \gamma \, |1\rangle_a |0\rangle_b$$

SPDC $\rightarrow$ Spontaneous parametric down conversion



$$|\Psi^I(t)\rangle \simeq |\Psi(0)\rangle - \frac{it}{\hbar} H_1 |\Psi(0)\rangle =$$

$\hookrightarrow$ 1° ordine

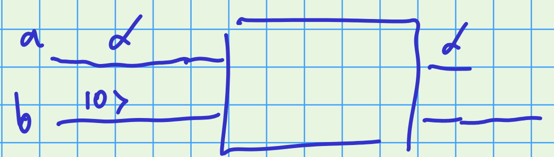
$$= \boxed{|0\rangle_b |0\rangle_c - \frac{it\chi^{(2)}\gamma}{\hbar} |1\rangle_b |1\rangle_c}$$ st entangled

$$H_1 |0_b 0_c\rangle = \chi^{(2)}\left(\gamma \alpha b^\dagger c^\dagger + \gamma^* \alpha^* \underbrace{b c}_{=0}\right)|0\rangle|0\rangle$$

$b^\dagger |0\rangle = |1\rangle$

$c^\dagger |0\rangle = |1\rangle$

SQUEEZING : $b = c \Rightarrow H_1 = \chi^2\left(\gamma a b^{\dagger 2} + \gamma^* a^\dagger b^2\right)$



← vedremo viene vuoto squeezed

perché uno dei campi di ingresso è un campo classico?

$|\alpha| \gg 1$ controbilancia $\chi^{(2)} \ll 1$

METODI ALGEBRICI per MQ

def ALGEBRA di LIE $\stackrel{def}{=}$ sp vettoriale complesso (→ sp di operatori)
dotato di un prodotto vettoriale
"COMMUTATORE" interno

$$A, B \in V \Rightarrow [A, B] \in V$$

def generatori di algebra $\stackrel{def}{=}$ BASE di OP $\{X_1 \dots X_n\}$

$$\forall A \in V \qquad A = \sum_i a_i X_i$$

def COSTANTI di STRUTTURA $\stackrel{def}{=}$ c_{ijk} $\qquad [X_i, X_j] = \sum_k c_{ijk} X_k$ ← com interno

↳ caratterizzano l'algebra univocamente

esempi Weyl-Heisenberg wh (minuscole) generat $\{a, a^\dagger, \mathbb{1}\}$

cost strutt $[a, a^\dagger] = \mathbb{1}$ ← osc armonico

$su(2)$ → algebra del mom angolare

generat $\{J_+, J_-, J_z\}$

cost str
$$\boxed{\begin{aligned} [J_+, J_-] &= 2J_z \\ [J_z, J_\pm] &= \pm J_\pm \end{aligned}}$$

alternativam → generat $\{J_x, J_y, J_z\}$ $\qquad J_\pm \overset{def}{=} J_x \pm i J_y$

cost $\boxed{[J_x, J_y] = i\hbar J_z}$ e permutaz cicliche

Le mat di Pauli soddisfano a $su(2)$ ma $J_\alpha = \dfrac{\sigma_\alpha}{2}$ $\quad \alpha = x, y, z$

algebra $su(1,1)$

generat $\{K_+, K_-, K_z\}$

cos str
$$\boxed{\begin{aligned} [K_+, K_-] &= -2K_z \\ [K_z, K_\pm] &= \pm K_\pm \end{aligned}}$$

GRUPPO $\overset{def}{=}$ set con legge di composiz prodotto t.c.

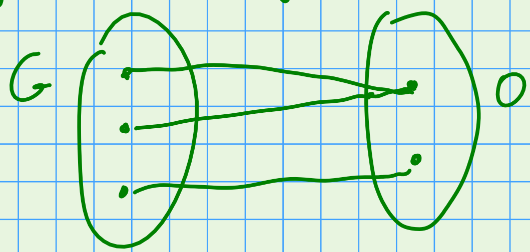
1. interno $\quad a, b \in G \Rightarrow a \cdot b \in G$
2. associat $\quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. $\exists$ el neutro $\mathbb{1} \in G$ t.c. $\forall a \in G \quad a \cdot \mathbb{1} = a$
4. $\forall a \in G \;\; \exists\, a^{-1}$ t.c. $\quad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = \mathbb{1}$

def GRUPPO di LIE $\overset{def}{=}$ gruppo dove tutti gli el sono parametriz da Fn analitiche di n parametri cont

$a \in G \qquad a = a(x_1 \dots x_n)$

def RAPPRESENTAZ di un GRUPPO $\overset{def}{\iff}$ OMOMORFISMO su spazi OP

ad ogni el del gruppo associo un solo operatore



Th di LIE

OGNI ALGEBRA di OP genera un gruppo per esponenziazione

cioè l'esponenziale degli el algebra $\Rightarrow$ ho un gruppo

dimostrazione prossimamente

NOTAZ $\rightarrow$ minuscolo per algebre wh $\rightarrow a, a^+, 1\!\!1$

MAIUSCOLO " gruppi WH $\rightarrow e^{\alpha a - \alpha^* a^+}$