OTTICA Q 28/10/20

Quantizz campo elm

$$H = \sum_{\vec{k}\sigma} \hbar\omega_{\vec{k}} \left(a^{+}_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma} + \frac{1}{2} \right)$$

$a_{k\sigma}$ op distruzione del modo $\vec{k},\sigma$

vuoto elm → stato fondam di H : avett con aval 0 dell'op numero $a^{+}a = \sum_{\vec{k}\sigma} a^{+}_{k\sigma} a_{k\sigma}$

en $\langle 0 | H | 0 \rangle = \sum_{k\sigma} \frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2} = +\infty$

$$\omega_{k} = c|\vec{k}| = \frac{2\pi c}{L}\sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2}$$

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$$

Casimir : variaz dim L ⇓ variaz en di vuoto

VUOTO non è il nulla aristotelico

↳ vettore nullo dello sp di Hd

non è uno stato → non posso normalizzare

Fotone $\stackrel{def}{=}$ quanto di eccitazione di un modo della radiazione elm

un fotone per un modo → $a_{n=0}$ sarà una sovrapposiz quantistica di fotoni modi b_m

$$b_m = \sum_n U_{mn} a_n$$

$$|1\rangle_{n=0} = a^{+}_{n=0}|0\rangle = \Big(\overbrace{\sum_m U^{*}_{\substack{n\,m\\ \shortparallel\\ 0}} b_m}^{a_n}\Big)^{+}|0\rangle =$$

$$= \sum_m U_{mn}\, b^{+}_{m}|0\rangle$$

Stato di Fock (o stato numero) $|n_{\vec{k},\sigma}\rangle = \frac{(a^{+}_{k\sigma})^{n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle$

Passaggio al continuo $L \to \infty$

$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(l_1, l_2, l_3) \Rightarrow$ in un elem di volume nello sp di vettori $\vec{k}$ $V_{\vec{k}} = \Delta K_x \Delta K_y \Delta K_z$ il numero di vettori $\vec{k}$ è $\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \Delta K_x \Delta K_y \Delta K_z$ cioè La densità di vettori $\vec{k}$ è $\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3$

$$\sum_{\vec{k}} \underset{L\to\infty}{\simeq} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int_{\mathbb{R}^3} d^3k$$

direttamente quantizzare senza scatola → M.W.

$$[a_{\vec{k},\sigma}, a^{+}_{\vec{k}',\sigma'}] = \delta(\vec{k}-\vec{k}')\delta_{\sigma\sigma'}$$

$\Downarrow$

a non sono adimensionali

- INTERAZIONE RADIAZIONE MATERIA

→ | INVARIANZA di GAUGE LOCALE $U(1) \Longrightarrow$ MINIMAL COUPLING HAMILTONIAN

EQ di SCHR per particella di massa m e carica q

↳ $\frac{p^2}{2m} = H \Rightarrow \frac{p^2}{2m}|\psi\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle$

LOCALE $\rightarrow$ rappresentazione della posiz

$$|\psi\rangle = \underbrace{\int dx\, |x\rangle\langle x|}_{\mathbb{1}} \psi\rangle = \int dx\, |x\rangle \underset{\langle x|\psi\rangle}{\underset{\shortparallel}{\psi(x)}}$$

rappres posiz di $|\psi\rangle$

$$P = -i\hbar\vec{\nabla}$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}}$$

NON è invariante per questa trasf

Chiedo che sia invariante per trasformazione $U(1)$ locale

$$\psi(\vec{r},t) \longrightarrow \psi'(\vec{r},t) \overset{def}{=} e^{i\vartheta(\vec{r},t)}\psi(\vec{r},t)$$

La fase è un campo scalare $\vartheta = \vartheta(\vec{r},t)$

dobbiamo cambiare eq Sch:

questa eq è invariante

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\nabla} - i\frac{q}{\hbar}\vec{A}(\vec{r},t)\right)^2 + q\,\phi(\vec{r},t)\right]\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

dobbiamo introdurre un campo vettor $\vec{A}$ e un campo scal ϕ

introduciamo le derivate covarianti

$$\vec{\nabla} \longrightarrow \vec{\nabla} - i\frac{q}{\hbar}\vec{A}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} + i\frac{q}{\hbar}\phi$$

l'invarianza di questo $\Rightarrow$ l'invarianza

$$\left(\vec{\nabla} - i\frac{q}{\hbar}\vec{A}'\right)\psi' \overset{!}{=} e^{i\vartheta}\left(\vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar}\vec{A}\right)\psi$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar}\phi'\right)\psi' = e^{i\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar}\phi\right)\psi$$

COVARIANTI

$\Downarrow$

invarianti per trasformaz di Gauge

$$\vec\nabla \psi e^{i\vartheta} - \frac{iq}{\hbar}\vec A' \psi e^{i\vartheta} = e^{i\vartheta}\vec\nabla\psi + \psi \underbrace{\vec\nabla e^{i\vartheta(\vec r,t)}}_{i\psi e^{i\vartheta}\vec\nabla\vartheta} - \frac{iq}{\hbar}\vec A'\psi e^{i\vartheta}$$

$$= e^{i\vartheta}\left(\vec\nabla - \frac{iq}{\hbar}\vec A\right)\psi$$

$$\vec A' = \vec A + \vec\nabla\vartheta\,\frac{\hbar}{q}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi e^{i\vartheta} + \frac{iq}{\hbar}\phi'\psi e^{i\vartheta} = e^{i\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial t} + ie^{i\vartheta}\psi\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar}e^{i\vartheta}\phi'\psi$$

$$= e^{i\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar}\phi\right)\psi$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial\vartheta}{\partial t}\frac{\hbar}{q}$$

sono esattamente le trasformazioni di gauge dei potenziali elm $\Rightarrow \vec A, \phi$ sono effettivamente i potenziali elm

imposto l'invarianza per trasf $U(1)$ locali $\Rightarrow$ otteniamo un'eq Sch che contiene i potenziali elm

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec\nabla - i\frac{q}{\hbar}\vec A(\vec r,t)\right)^2 + q\phi(\vec r,t)\right]\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec\nabla - i\frac{q}{\hbar}\vec A'(\vec r,t)\right)^2 + q\phi'(\vec r,t)\right]\psi' = i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t}$$

$$\vec A' = \vec A + \vec\nabla\vartheta\,\frac{\hbar}{q} \qquad \psi' = \psi e^{i\vartheta(\vec r,t)}$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial\vartheta}{\partial t}\frac{\hbar}{q}$$

LOCALE

$$P = -i\hbar\vec\nabla$$

$$\Big(\underbrace{\frac{1}{2m}\left[P - q\vec A\right]^2 + q\phi}_{H\ \text{totale}}\Big)|\psi\rangle = i\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t}$$

APPROX di DIPOLO

fotone ed elettrone → nell'atomo $\sim 10^{-10}$ m

↓ lunghezza d'onda (visibile) $\lambda \sim 10^{-7}$ m

elettrone vincolato in posiz $\ll \lambda$

considerando campo uniforme

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r},t) \propto e^{i\vec{k}\cdot\underbrace{(\vec{r}_{at}+\vec{r}_i)}_{\vec{r}}} \sim e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_{at}} + \dots$$

ss all'ordine zero attorno alla posiz dell'atomo

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\nabla} - i\frac{q}{\hbar}\vec{A}(\vec{r}_{at},t)\right)^2 + \cancel{q\phi} + \left(U(\vec{r})\right) =$$

pot atomico

gauge di Coulomb $\phi = 0$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla^2 - i\frac{q}{\hbar}\underline{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}_{at})} - i\frac{q}{\hbar}\underline{\vec{A}\cdot\vec{\nabla}} - \frac{q^2}{\hbar^2}A^2\right)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}_{at}) = \underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})}_{=0} + \vec{A}\cdot\vec{\nabla}$$

Campo debole

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla^2 - 2i\frac{q}{\hbar}\vec{A}(\vec{r}_{at})\cdot\vec{\nabla} - \cancel{\frac{q^2}{\hbar^2}A^2}\right) =$$

$$= -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + \frac{i\hbar q}{m}\vec{A}\cdot\vec{\nabla}$$

H_i ← H interazione tra elettrone e radiaz

$-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$ ← Ham di elettrone libero

$\frac{p^2}{2m} + U(\vec{r})$ ← Ham di elettrone

$p = -i\hbar\vec{\nabla}$

$$\Rightarrow H_i = -\frac{q}{m}\vec{A}\cdot\vec{p} = -\frac{q}{m}\vec{p}\cdot\vec{A}$$

Ham di interaz $\vec{A}\cdot\vec{p}$ (approx dipolo, campo debole)

Ham $\underline{\vec{E}\cdot\vec{r}}$, $\leftarrow$ cambio gauge

Gauge di campo el o E-gauge

$$\vartheta \overset{\text{imp}}{=} \underbrace{-\vec{A}(\vec{r}_{at})\cdot\vec{r}\,\frac{q}{\hbar}}$$

$$\psi \to \psi' = e^{i\vartheta}\psi = \psi\, e^{-i\frac{q}{\hbar}\vec{A}(\vec{r}_{at})\cdot\vec{r}}$$

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\vartheta\,\frac{\hbar}{q} = \vec{A}(\vec{r}) - \vec{\nabla}\left(\vec{A}(\vec{r}_{at})\cdot\vec{r}\right) = \vec{A}(\vec{r}) - \vec{A}(\vec{r}_{at})$$

gauge di Coulomb $\phi = 0$ $\phi' \neq 0$

$$\phi \to \phi' = \phi - \frac{\partial\vartheta}{\partial t}\frac{\hbar}{q} = \cancel{\phi} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r}_{at})\cdot\vec{r}$$

$$= \cancel{\phi} + \vec{r}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r}_{at})$$

eq Sch nell' E-gauge:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar}\cancel{\vec{A}'(\vec{r}_{at})}\right)^2 + U + q\phi'\right)\psi' = i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t}$$

$\vec{A}'(\vec{r}_{at}) = \vec{A}(\vec{r}_{at}) - \vec{A}(\vec{r}_{at})$

approx di dipolo $\Rightarrow$ $\vec{A}$ va valutato in $\vec{r}_{at}$

$$\vec{r}\cdot\frac{\partial\vec{A}(\vec{r}_{at})}{\partial t} = -\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}_{at})$$

gauge di Coulomb $\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \cancel{\vec{\nabla}\phi}$

$$\Big(\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U}_{H} \underbrace{- q\vec{r}\cdot\vec{E}}\Big)\psi' = i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t}$$

elettrone

$\to$ interazione $\boxed{H_i = \pm q\,\vec{r}\cdot\vec{E}}$

approx < dipolo, campo debole

+ E-gauge

$$H_{TOT} = H_{at} + H_{radiaz} + H_{int}$$

$$H_{at} = \sum_j e_j\,|e_j\rangle\langle e_j| \qquad e_j \text{ aval}, \quad |e_j\rangle \text{ avett}$$

$$H_{radiaz} = \sum_{\vec{k}\sigma} \hbar \omega_{\vec{k}} \left(a^\dagger_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma} + \frac{1}{2} \right)$$

carica

$$H_i = -e \vec{r} \cdot \vec{E} = e \vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} e \vec{r} \cdot \sum_{k\sigma} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_k L^3}} \, \vec{e}_{k\sigma} \times$$

versore pol

$$\times \left(a_{\vec{k}\sigma} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + h.c. \right) =$$

$$= \underbrace{e \vec{r} \cdot \sum_{k\sigma} \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\varepsilon_0 L^3}} \, \vec{e}_{\vec{k}\sigma} \left(i a_{\vec{k}\sigma} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + (-i) a^\dagger_{\vec{k}\sigma} e^{\cdots} \right)}_{H_{int} \, (\vec{E}\cdot\vec{r})}$$