OTTICA Q 27/10/20

Quantizzaz campo elm

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \, e^{-i\omega_n t} \, \vec{u}_n(\vec{r}) \qquad b_n = b^*_{-n}$$

$e^{-i\omega_n t}$ ← parte tempor; $\vec{u}_n(\vec{r})$ ← parte spaziale

$\vec{u}_n(\vec{r}) \overset{def}{=}$ MODI NORMALI → soluzioni di eq di Helmholtz

ampiezze $q_n(t) = b_n \, e^{-i\omega_n t}$

4 eq Maxw nel vuoto nel gauge Coulomb → $\Box \vec{A} = 0$

$$\Box = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\Box \vec{A}} = \sum_n q_n(t) \, \nabla^2 \vec{u}_n(\vec{r}) - \frac{\vec{u}_n(\vec{r})}{c^2} \underbrace{\frac{\partial^2 q_n(t)}{\partial t^2}}_{= -\omega_n^2 q_n(t)}$$

$$= \sum_n \underset{\substack{\shortparallel \\ b_n e^{-i\omega_n t}}}{q_n(t)} \left[\nabla^2 \vec{u}_n(\vec{r}) - \frac{\omega_n^2}{c^2} \vec{u}_n(\vec{r}) \right] = 0$$

← sono fn linearmente indip $\Rightarrow \sum_n = 0 \Longleftrightarrow$ tutti i termini della somma sono nulli cioè

$$\boxed{\nabla^2 \vec{u}_n - \frac{\omega_n^2}{c^2} \vec{u}_n = 0} \qquad \forall n$$

← Eq. di Helmholtz : definisce i modi normali

$$\nabla^2 \vec{u}_n = \frac{\omega_n^2}{c^2} \vec{u}_n$$ ← eq agli aval per l'operatore ∇^2

La soluz dipende dalle condiz al contorno → "la forma del fotone"

scegliamo cavità parallelepipedo → onde piane
cubo di lato L

$$\Rightarrow \boxed{\vec{u}_n(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}}\, \vec{e}_{l\sigma}\, e^{i\vec{k}_l\cdot\vec{r}}}$$ ← perché è soluz eq di Helmholtz

↑ versore di polariz

$$\vec{k}_l \stackrel{def}{=} \frac{2\pi}{L}(l_1, l_2, l_3) = \frac{2\pi}{L}(l_1\vec{i} + l_2\vec{j} + l_3\vec{k})$$

$\vec{i}$: versore // asse x

Viene dalle condiz periodiche $\qquad l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}$

$$\vec{u}_n(\vec{r}_0 = (x=0, y, z)) \stackrel{IMP}{=} \vec{u}_n(\vec{r}_L = (x=L, y, z))$$

$$e^{i\overbrace{(k_y y + k_z z)}^{\vec{k}\cdot\vec{r}_0}} \stackrel{IMP}{=} e^{i\overbrace{(k_x L + k_y y + k_z z)}^{\vec{k}\cdot\vec{r}_L}}$$

$$\Updownarrow$$

$$k_x = \frac{2\pi}{L} l_1 \quad \text{con } l_1 \in \mathbb{Z}$$

$$k_y = \frac{2\pi}{L} l_2 \qquad k_z = \frac{2\pi}{L} l_3$$

$$\nabla^2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \vec{\nabla}\cdot i\vec{k}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = -k^2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

eq di Helmholtz a patto di scegliere $|\vec{k}_n| = \frac{\omega_n}{c^2}$

$$\vec{u}_n(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}}\, \vec{e}_{\vec{k}\sigma}\, e^{i\vec{k}_l\cdot\vec{r}}$$

n è un indice collettivo che contiene $\vec{k}$, che contiene l_1, l_2, l_3
e anche σ ← che indice di polarizzazione

$$n = \vec{k}, \sigma = \underbrace{l_1, l_2, l_3}_{l}, \sigma \qquad \sum_n = \sum_{l_1 l_2 l_3} \sum_\sigma = \sum_{\vec{k}} \sum_\sigma$$

POLARIZZAZ $\rightarrow$ $\vec{e}_{\vec{k},6}$ contiene la parte vettoriale di $\vec{u}_n(\vec{r})$, che dà la parte vettoriale di $\vec{A}$

$\vec{u}_n$ è $\parallel$ ad $\vec{A}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$$

gauge di coulomb $\Rightarrow$ se lavoriamo con onde piane $\vec{A} \perp \vec{k}$

$$\overset{0}{\overset{\parallel}{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}}} = \vec{\nabla}\cdot\sum_n q_n(t)\vec{u}_n(\vec{r}) = \sum_n q_n(t) \underbrace{\vec{\nabla}\cdot \overbrace{\vec{u}_n(\vec{r})}^{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}}_{i\vec{k}\cdot\vec{u}_n(\vec{r})} =$$

$$= \frac{i}{\sqrt{L^3}}\sum_n q_n(t)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \vec{e}_{\vec{k},6}\cdot\vec{k} = 0 \iff \vec{e}_{\vec{k},6}\cdot\vec{k}=0$$

lineare indip delle onde piane

cioè i versori $\vec{e}$ sono $\perp$ a $\vec{k}$

$\Rightarrow$ posso scegliere una base di 2 vettori $\perp \vec{k}$ per rappresentare la parte vettoriale

$$\vec{E} = -\cancel{\vec{\nabla}\phi} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \vec{E}\parallel\vec{A} \text{ cioè } \vec{e}_{\vec{k},6} \text{ è la}$$

per ogni componente $\vec{k}$

polarizzazione

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\sum_n q_n(t)\,\vec{u}_n(\vec{r}) = \sum_{\vec{k},6} \frac{b_n\, e^{-i\omega_n t}}{\sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{L^3}}\,\vec{e}_{\vec{k},6}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$\omega_n = c|\vec{k}|$

$$\overset{def}{=} \sum_{\vec{k}6}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3\omega_{\vec{k}}}}\;\vec{e}_{\vec{k},6}\left(a_{\vec{k},6}\, e^{-i(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\right) =$$

$b_n = b^*_{-n}$ $\leftarrow$ perché $\vec{A}$ campo vett reale

def a in termini di b

$$\boxed{\vec{A} = \sum_{\vec{k}6}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3\omega_{\vec{k}}}}\;\vec{e}_{\vec{k},6}\left(a_{\vec{k},6}\, e^{-i(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{r})} + a^*_{\vec{k},6}\, e^{i(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\right)}$$

Quantizzazione:

1. calcolare l'Hamilt H del campo elm libero
2. vediamo che questa è una somma di Hamilt di osc arm
3. Quantizzaz canonica $\rightarrow$ la trattiamo come somma di oscillatori armonici quantizzati

cioè ogni modo è un oscillatore armonico

1. Calcolo di $H \underset{\uparrow}{=} \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(E^2 + c^2 B^2 \right) =$

en del campo elm

$\vec{E} = \cancel{-\nabla\Phi} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ $\qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ $\qquad$ Knight $\rightarrow$ pg 21

$\underbrace{\vec{A} = \sum_{\vec{k},b} \sqrt{\cdots}\, \vec{e}_{kb} \left(a_{\vec{k},b}\, e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} + c.c. \right)}$

$= \sum_{\vec{k},b} \hbar \omega_{\vec{k}}\, a_{\vec{k},b}\, a^*_{\vec{k},b} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k},b} P^2_{\vec{k},b} + \omega^2_{\vec{k}} x^2_{\vec{k},b}$

$a = \sqrt{\frac{2\omega_k}{\hbar}} \left(x_{\vec{k},b} + i \frac{P_{\vec{k},b}}{\omega_k} \right) \Leftarrow \begin{cases} x_{\vec{k},b} \overset{def}{=} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\vec{k}}}} \left(a_{\vec{k},b} + a^*_{\vec{k},b} \right) & \leftarrow \text{"posiz"} \\ P_{\vec{k},b} \overset{def}{=} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} (-i) \left(a_{\vec{k},b} - a^*_{\vec{k},b} \right) & \leftarrow \text{"momento"} \end{cases}$

non è una vera posiz

2. somma di Hamiltoniane di oscillatori armonici $m = 1$

Un oscillatore armonico per ogni modo $\vec{k}, b$
$\qquad b = 1, 2$

3. quantizz canonica $\rightarrow$ sappiamo quantizzare l'osc armonico

$\left[\hat{x}, \hat{p} \right] \overset{IMP}{=} i\hbar \quad \leftarrow$ quantizz canonica dell'osc armonico

i modi diversi sono indip tra loro ($\leftrightarrow$ indip lineare delle onde piane)

$$[\hat{x}_{k,\sigma}, \hat{p}_{\vec{k}',\sigma'}] \overset{IMP}{=} \underbrace{\delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{\sigma\sigma'}}\, i\hbar$$

se $k \neq k'$ oppure $\sigma \neq \sigma' \Rightarrow$
osc armonici indip $\Rightarrow$ commutano

"Posiz" non è una posiz
"momento" " " momento

→ è equivalente a $\boxed{[a_{\vec{k},\sigma}, a^{+}_{\vec{k},\sigma}] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{\sigma\sigma'}}$

cioè gli $a_{k\sigma}$ diventano op di distruzione del modo $\vec{k},\sigma$

CAMPO ELM QUANTIZZATO :

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k}\sigma} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3 \omega_k}}\; \vec{e}_{\vec{k},\sigma} \underbrace{\left(\hat{a}_{k\sigma}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)} + a^{+}_{k\sigma}\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)}\right)}$$

$\Downarrow$

$\vec{A}$ è op autoaggiunto

$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

pittura di Heisenberg
osservabile che evolvono

L'Hamiltoniana → $\boxed{\text{non}}$ si ottiene dall'Hamilt calcolata sopra $a_{\vec{k}\sigma} \to \hat{a}_{k\sigma}$
$a^{*}_{\vec{k}\sigma} \to \hat{a}^{+}_{\vec{k},}$

→ perchè avevamo fatto il conto $\int \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2$ senza preoccuparci dei commutatori

se tenete conto dei commut

$$H = \sum_{\vec{k}\sigma} \hbar \omega_{\vec{k}} \left(a^{+}_{\vec{k},\sigma} a_{\vec{k},\sigma} + \frac{1}{2}\right)$$

somma di Hamilt di osc armonici

$H^H = H^S \qquad U^{+} H^S U = H^H \qquad U = e^{-\frac{i}{\hbar} H t}$

Spazio di Hilbert della radiaz elm →

ha come base

$$\bigotimes_{\vec{k},\sigma} \underbrace{|n_{\vec{k},\sigma}\rangle}$$

st di Fock dell'oscillatore $\vec{k},\sigma$ $\quad |n_{\vec{k}\sigma}\rangle$ è avett $N_{\vec{k}\sigma} = a^\dagger_{\vec{k},\sigma} a_{\vec{k},\sigma}$

gli oscillatori armonici sono indip ⇒ postulato prod tensore

ATTENZIONE: questa divisione in prod tensore non è rigorosa: il campo elm è un UNICO sistema

ho un unico sp di Hilbert $\quad |\prod_{\vec{k},\sigma} n_{\vec{k}\sigma}\rangle = \bigotimes_{\vec{k},\sigma} |n_{\vec{k},\sigma}\rangle$

è vera $\boxed{\text{SOLO}}$ se avete fissato i modi → se cambiate modi ⇒ cambia la struttura a prodotto tensore

La struttura a prod tensore è dipendente dalla scelta dei modi

i modi sono def come soluz di eq Helmholtz (dip dalle condiz al contorno)

← eq aval ∇^2

abbiamo scelto come base delle soluz, le onde piane

possiamo cambiare base

$$\vec{u}_m(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \vec{e}_{\vec{k},\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \longrightarrow \vec{v}_n \overset{def}{=} \sum_m U_{nm} \vec{u}_m(\vec{r})$$

se $\vec{u}_m \longrightarrow$ op $a_{\vec{k},\sigma}$ $\qquad m = \vec{k},\sigma$

$\vec{v}_m \longrightarrow$ $b_{\vec{k},\sigma}$

per linearità $a_n = a_{\vec{k}\sigma} = \sum_m U_{nm} b_m$

$$b_m = b_{\vec{k},\sigma} = \sum_n U^*_{mn} a_n = \sum_{\vec{k}'\sigma'} U_{\vec{k}\sigma,\vec{k}'\sigma'} a_{\vec{k}'\sigma'}$$

b_m è ancora un op di distruz

$$[b_m, b^+_{m'}] = \left[\sum_n U^*_{mn} a_n, \left(\sum_{n'} U^*_{m'n'} a_{n'}\right)^+\right] =$$

$$= \sum_{n n'} U^*_{mn} U_{n'm'} \underbrace{[a_n, a^+_{n'}]}_{\delta_{nn'}} = \sum_n U^*_{mn} U_{nm'} = \delta_{mm'}$$

$$[b_m, b^+_{m'}] = \delta_{mm'}$$