OTTICA Q 21/10/20

[18 11. 11 6 {3]
teoria Bohm

$\boxed{\text{arxiv.org}}$
sito preprint

QUANTIZ campo elm → libero

Ripasso elm classico : approccio assiomatico
↳ Forza Lorentz : definizione di campo el e mag a partire da forza su carica di prova q →

$$\boxed{\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)}$$

velocità della carica

ASSIOMI : Eq Maxw tutta l'eld si ricava da questi

densità di carica

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

densità di corrente

div e rot + condiz al cont ⇒ il campo vett è univocam det

(unicità delle soluz di eq Maxw)

Semplificazione → uso potenziali → libertà di gauge

identità differenziali < $\underbrace{\text{div rot} = 0}$ $\forall \vec{v}\quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$
$\underbrace{\text{rot grad} = 0}$ $\forall f\quad \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0$

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} \overset{\text{def}}{=} \vec{\vec{A}} \cdot \vec{b}} \qquad \vec{\vec{A}} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\vec{A}}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_z b_y + a_y b_z \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\text{div rot} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & -\partial_x \\ -\partial_y & \partial_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$= \left(\underbrace{\partial_y\partial_z - \partial_z\partial_y}_{0},\ \underbrace{-\partial_x\partial_z + \partial_z\partial_x}_{0},\ \underbrace{\qquad}_{0}\right)\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = 0$$

rot grad = 0

3° eq di Maxw è autom soddisf se $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$$

2° eq $\quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\overbrace{\vec{\nabla}\times\vec{A}}^{\vec{B}} \iff \vec{\nabla}\times\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$

è automaticam soddisf se

$$\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi$$

convenzione

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla}\times\vec{A} \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \end{aligned}}$$

← def dei potenziali < vettore $\vec{A}(\vec{r},t)$ / scalare $\phi(\vec{r},t)$

NON identifica univocam i potenzial.
c'è libertà di Gauge nella scelta dei pot

Rimangono la 1° e 4° eq M.

1° : $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \longrightarrow \boxed{-\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ ← 3°

4° : $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \longrightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)}$

Lavoriamo nel vuoto $\to$ $\rho = 0$ $\vec{j} = 0$

rot rot = grad div − laplaciano

$\nabla\vec{v}$ $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{v} = \vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v} - \underbrace{\nabla^2\vec{v}}_{\text{laplaciano}}$

laplaciano = div grad

$$\nabla^2\vec{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\nabla^2|\vec{v}| = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}|\vec{v}|$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \nabla^2\vec{A} = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\phi$$

$$\to \boxed{\Box\vec{A} = \vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\phi}$$ 4° eq Max

$$\Box\vec{v} \overset{def}{=} \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{v}$$

Dalambertiano

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

Liberta' di gauge : i potenziali non sono univocam det dalla def

possiamo cambiare i potenziali, senza cambiare i campi: $\vec{E}$, $\vec{B}$

rot grad = 0

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{A} + \vec{\nabla}\chi\right)$$ con $\chi(\vec{r},t)$ arbitrario

def di $\vec{A}$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \overset{IMP}{=} \vec{E}' = -\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}$$

$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$, $\quad \phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}$

$$= -\vec{\nabla}\phi + \cancel{\vec{\nabla}\frac{\partial\chi}{\partial t}} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\chi}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla}\chi\\ \phi' &= \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}\end{aligned}}$$

TRASFORMAZ di GAUGE : cambio pot tenendo i campi

Gauge di Lorentz : scelgo χ t.c. $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$

gauge di Coulomb: $\boxed{\text{scelgo } \chi}$ t.c. $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = \vec{\nabla}\cdot\underset{\text{IMP}}{\vec{A}} + \nabla^2\chi \qquad \nabla^2\chi = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}'$$

eq Poisson

$$-\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\overset{0}{\vec{\nabla}\cdot A} = \cancel{\frac{\rho}{\varepsilon_0}}\,0 \leftarrow 3°$$

$$\boxed{\Box\vec{A} = \vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\phi} \leftarrow 4°$$

$3° \rightarrow \nabla^2\phi = 0$ eq Poisson $\phi = 0$

$4° \rightarrow \boxed{\Box\vec{A} = 0}$ eq d'onda per pot vettore

semplificaz delle eq Maxw {eq diff accoppiate in 6 incognite (1° ordine)}

↓ pot + libertà gauge + campo libero

1 unica eq differ in 3 incognite $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ (2° ordine)

Ripasso quantizzaz oscillatore armonico

$$H_{osc} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$$

x posizione; ω freq angolare; p momento; m massa

quantizzaz canonica → prin corrispondenza

$$[x, p] \overset{IMP}{=} i\hbar \qquad [x,p] = xp - px$$

operatore di annichilazione

$$a \overset{def}{=} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega m}} \left[m\omega x + ip \right]$$

$$a + a^\dagger = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar \cancel{\omega}}}\, x$$

$$a - a^\dagger = \sqrt{\frac{2}{\hbar\omega m}}\, ip$$

$$\boxed{[a, a^\dagger] = 1}$$

$$H_{osc} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = -\frac{\hbar\omega}{4}(a^\dagger - a)^2 + \frac{m\omega^2}{2}\frac{\hbar}{2m\omega}(a + a^\dagger)^2$$

$$= \frac{\hbar\omega}{4}\left[-\cancel{a^2} - \cancel{a^{\dagger 2}} + a^\dagger a + a a^\dagger + \cancel{a^2} + \cancel{a^{\dagger 2}} + a a^\dagger + a^\dagger a \right]$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\left[\underbrace{a a^\dagger}_{= a^\dagger a + 1} + a^\dagger a \right] \overset{[a,a^\dagger]=1}{=} \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) = H_{osc}$$

$a^\dagger$ op creaz

a " distruz

Aval e Avett di H:

$$H|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle \quad \text{con } n \in \mathbb{N} \quad 0, 1, 2 \ldots$$

$|n\rangle$ → st di Fock

op numero $N \overset{def}{=} a^\dagger a$ è op positivo

$\forall |\psi\rangle \quad \langle\psi | a^\dagger a | \psi\rangle = \| a|\psi\rangle \|^2 \geq 0$

op numero ha un aval minimo $\alpha_0 \geq 0$

eq aval di $a^\dagger a$: $\quad a^\dagger a |v\rangle = v\, |v\rangle$

$$N\left(a|v\rangle\right) = \left(a^\dagger a\right)\left(a|v\rangle\right) = \underbrace{a^\dagger a}_{\substack{\parallel \\ a a^\dagger a - a}} a\, |v\rangle =$$

$[a^\dagger a, a] = \underbrace{[a^\dagger, a]}_{=-1} a + a^\dagger \underbrace{[a, a]}_{=0} = -a$

$[AB, C] = [A, C]B + A[C, B]$

$a^\dagger a |v\rangle = v|v\rangle$

$$= a\left(a^\dagger a - 1\right)|v\rangle = a(v-1)|v\rangle = (v-1)\, a|v\rangle$$

$\Rightarrow$ $a|v\rangle$ è avett relativo all'aval $(v-1)$

$a^\dagger a$ è op positivo $\Rightarrow \alpha_0 = 0$ altrimenti continuando ad applicare a agli avett arriverei ad un aval negativo

se invece $\alpha_0 = 0$

$a|v_0\rangle = \sqrt{v_0}\, |v_0\rangle = 0$

avett rel α_0 $\quad$ se $v_0 = \alpha_0$

perché $\| a|v_0\rangle \|^2 = \langle v_0 | a^\dagger a | v_0\rangle = v_0 \underbrace{\langle v_0 | v_0\rangle}_{1}$

$\Rightarrow a|v_0\rangle = \sqrt{v_0}\, e^{i\varphi} |v_0\rangle$

avett relativo all'aval min $\alpha_0 = 0$ è $|\nu_0\rangle = |0\rangle$
(vuoto)

$$N a^+ |\nu\rangle \overset{\downarrow}{=} (\nu+1) a^+ |\nu\rangle$$ cioè $a^+|\nu\rangle$ è l'aval

di $N = a^+ a$ relativo all'aval $\nu + 1$

$\Rightarrow$ se partiamo da $|\nu = 0\rangle = |0\rangle$

otteniamo gli avett $a^+|0\rangle \propto |1\rangle$

$a^+|1\rangle \propto |2\rangle$

....

gli aval di a^+a sono numeri interi $0, 1, 2 \ldots$

$$\langle n | a^+ a | n \rangle \overset{\downarrow}{=} n \overbrace{\langle n | n \rangle}^{1}$$

$$(\langle n | a^+)(a | n\rangle) = (\langle n-1 |)\sqrt{n} \quad \sqrt{n}\, |n-1\rangle =$$

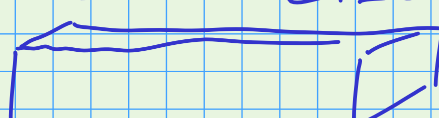
$$\langle n-1 | n-1 \rangle$$

$$\boxed{\begin{aligned} a|n\rangle &= \cancel{e^{i\varphi}}\sqrt{n}\,|n-1\rangle \\ a^+|n\rangle &= \cancel{e^{i\varphi}}\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \end{aligned}}$$

$$|n\rangle = \frac{a^{+n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle$$

QUANTIZZAZ del CAMPO ELM LIBERO

Campo in una cavità



↳ spazio di Hilbert separabile → un ∞ NUMERABILE di gr di libertà
(cioè $\exists$ una base discreta)

in cavità → sviluppo del campo in termini di modi normali → sviluppo in serie di Fourier sullo spazio e sul tempo

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \, e^{-i\omega_n t} \, \vec{u}_n(\vec{r})$$

sviluppo in serie di Fourier nel tempo

$b_n = b_{-n}^* \Leftarrow \vec{A}$ è un campo reale

b_n → AMPIEZZE

$\vec{u}_n(\vec{r})$ → MODI NORMALI → contengono la dip spaziale di $\vec{A}(\vec{r},t)$

la dip temporale è in