OTTICA Q 14/10/20

POVM $\longrightarrow$ statistica

STRUMENTO $\rightarrow$ statistica + stato dopo

POVM da strumento

strumento in termini di Kraus : $p(x)\rho_x = \sum_n A_n^{(x)} \rho A_n^{(x)+}$

$\uparrow$ indice di degener

Traccia di ambo i m. $\quad Tr[\rho_x]=1$

$$p(x) = Tr\left[\sum_n A_n^{(x)} \rho A_n^{(x)+}\right] \underset{\uparrow}{=} Tr\left[\sum_n A_n^{(x)+} A_n^{(x)} \rho\right]$$

invar perm ciclica Tr

$$\overset{\text{BSF v.2}}{=} Tr[\Pi_x \rho] \qquad \forall \rho$$

Strumento $\{A_x\}$

$$\Rightarrow \Pi_x = \sum_n A_n^{(x)+} A_n^{(x)} \underset{\text{no degenerato}}{=} A_x^+ A_x$$

NO vale viceversa: dalla POVM non possiamo ottenere lo strumento

2 strumenti che danno la stessa POVM

$1 \rightarrow \{A_x\}$

$2 \rightarrow \{U A_x\}$

due apparati diversi

hanno la stessa POVM

$$\Pi_x = \underbrace{A_x^+ A_x}_{1} = \underbrace{A_x^+ \overset{\mathbb{1}}{U^+ U} A_x}_{2}$$

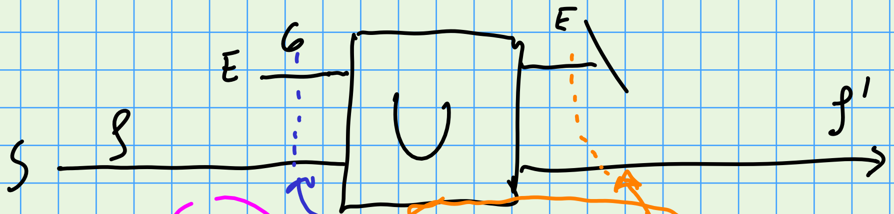
$$1 \rightarrow \rho_x = \frac{A_x \rho A_x^+}{p(x)}$$

$$2 \rightarrow \rho_x' = \frac{U A_x \rho A_x^+ U^+}{p(x)}$$

$$\rho_x \neq \rho_x'$$

- EVOLUZ di SISTEMA NON ISOLATO

sist non isolato → interagisce con altro (AMBIENTE)
sistema globale (sist + ambiente) è sist isolato
⇒ (post evoluz) ha evoluz unitaria



$$\rho' = \mathrm{Tr}_E\left[U \rho \otimes \sigma U^\dagger\right] =$$

$\sigma = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ (purificaz)

$$= \sum_i {}_E\langle i| U \rho \otimes |\varphi\rangle_E\langle\varphi| U^\dagger |i\rangle_E =$$

$|i\rangle_E$ base di $\mathcal{H}_E$

$$= \sum_i {}_E\langle i|U|\varphi\rangle_E \ \rho \ {}_E\langle\varphi| U^\dagger |i\rangle_E =$$

$$= \boxed{\sum_i A_i \rho A_i^\dagger = \rho'}$$

generalizz del caso isolato → $\boxed{\begin{array}{l}\rho' = U\rho U^\dagger \\ U^\dagger U = \mathbb{1}\end{array}}$

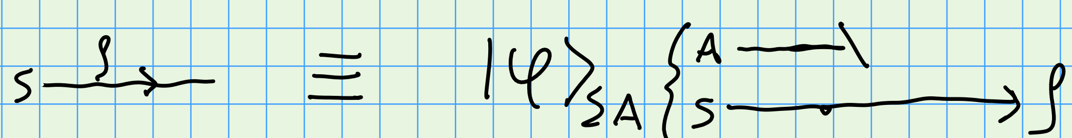
A_i sono op Kraus $\qquad \sum_i A_i^\dagger A_i = \mathbb{1}$

$\overset{\shortparallel}{\text{def}}$

${}_E\langle i|U|\varphi\rangle_E$

- PURIFICAZIONE

un ∀ stato misto può essere visto come un sottosist di uno st PURO di un sistema composto



$$\rho = \sum_i p_i\, |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad \Rightarrow \quad |\varphi\rangle_{SA} = \sum_i \sqrt{p_i}\, |\psi_i\rangle_S\, |i\rangle_A$$

$|i\rangle$ è una base di $\mathcal{H}_A$

$$\mathrm{Tr}_A\left[|\varphi\rangle_{SA}\langle\varphi|\right] = \sum_j {}_A\langle j| \sum_{ik} \sqrt{p_i p_k}\, |\psi_i\rangle_S\langle\psi_k| \otimes |i\rangle_A\langle k|j\rangle_A \qquad \delta_{ij} \quad \delta_{kj}$$

$$= \sum_j p_j\, |\psi_j\rangle\langle\psi_j| = \rho$$

SCHEMA RIASSUNTIVO postulato misura

- teoria $\longrightarrow$ postulato 4 : OSSERVABILI $O = \sum_m o_m |m\rangle\langle m|$
- lab $\rightarrow$ APPARATO $\rightarrow$ POVM (solo stat) $\Leftrightarrow$ t. Naimark

  $\Uparrow$ $\Pi_x = A_x^\dagger A_x$

  STRUMENTO (stat + stato dopo) $\Leftarrow$ t. Ozawa

  MODELLO A MISURA INDIRETTA

- **PITTURE** ("picture")

  " invarianza per permutaz ciclica della traccia

in MQ $\rightarrow$ prob $\quad p_t = \mathrm{Tr}\left[O\, \rho(t)\right]$

$\uparrow$ BSF (valore di aspettaz

$$= \mathrm{Tr}\left[O\, U \rho_0\, U^\dagger\right] = \mathrm{Tr}\left[U^\dagger O\, U\, \rho_0\right] =$$

PITT Schroedinger $\qquad$ Pitt Heis

$$U = U_1 \tilde{U}_2$$

$$= \mathrm{Tr}\left[U_1^\dagger O\, U_1\, \tilde{U}_2\, \rho\, \tilde{U}_2^\dagger\right]$$

Pitt interaz o Dirac

SCH: $\begin{cases} O_t^s = O_0^s \\ \rho_t^s = U \rho_0 U^\dagger \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} O_t^s = O_0^s \\ \dfrac{d\rho}{dt} = \dfrac{1}{i\hbar}[H, \rho^s] \end{cases}$

HEIS $\begin{cases} O_t^H = U^\dagger O_0^H U \\ \rho_t^H = \rho_0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \dfrac{dO_t^H}{dt} = \dfrac{1}{i\hbar}[O_t^H, H] \\ \rho_t^H = \rho_0 \end{cases}$

$U = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$

$$\frac{d(\overbrace{U^\dagger O_0 U}^{O_t^H})}{dt} = \frac{dU^\dagger}{dt} O_0 U + U^\dagger O_0 \frac{dU}{dt} =$$

$$= \frac{i}{\hbar} H \overbrace{U^\dagger O_0 U}^{O_t^H} + U^\dagger O_0 \left(-\frac{i}{\hbar} H\right) U = \frac{i}{\hbar}[H, O_t^H] =$$

$O_t^H = U^\dagger O_0 U$

$$= \frac{1}{i\hbar}[O_t^H, H]$$

INTERAZ: $H = H_1 + H_2$ $\qquad U_1 \stackrel{def}{=} e^{-\frac{i}{\hbar}H_1 t}$

$U = U_1 \tilde{U}_2$ $\qquad \tilde{U}_2 \stackrel{def}{=} U_1^\dagger U$ $\qquad U = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$

$\tilde{U}_2 \neq e^{-\frac{i}{\hbar}H_2 t}$ $\qquad$ se $[H_1, H_2] = 0 \Rightarrow e^{-\frac{i}{\hbar}(H_1+H_2)t} =$

c'è = SOLO

$e^{-\frac{i}{\hbar}H_1 t} \, e^{-\frac{i}{\hbar}H_2 t}$

$$\begin{cases} O_t^I = U_1^\dagger O_0^I U_1 \\ \rho_t^I = \tilde{U}_2 \rho_0 \tilde{U}_2^\dagger = U_1^\dagger U \rho_0 U^\dagger U_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dO_t^I}{dt} = \dfrac{1}{i\hbar}[O_t^I, H_1] \\ \dfrac{d\rho_t^I}{dt} = \dfrac{1}{i\hbar}[H_2^I(t), \rho_t^I] \end{cases}$$

← si ottiene come per pitt Heis

← simile a eq Liouville ma H_2^I

$$H_2^I(t) = U_1^\dagger H_2 U_1$$

$$U_1 = e^{-\frac{i}{\hbar}H_1 t}$$

$$\frac{d\rho_t^I}{dt} = \frac{d}{dt}\left(U_1^\dagger U \rho_0 U^\dagger U_1\right) = \underbrace{\frac{dU_1^\dagger}{dt}}_{= +\frac{i}{\hbar}H_1 U_1^\dagger} U \rho_0 U^\dagger U_1 +$$

$$U_1^\dagger \underbrace{\frac{dU}{dt}}_{= -\frac{i}{\hbar}H U} \rho_0 U^\dagger U_1 + U_1^\dagger U \rho_0 \underbrace{\frac{dU^\dagger}{dt}}_{= +\frac{i}{\hbar}H U^\dagger} U_1 + U_1^\dagger U \rho_0 U^\dagger \underbrace{\frac{dU_1}{dt}}_{= -\frac{i}{\hbar}H_1 U_1} =$$

$$= \frac{i}{\hbar}\Big(\cancel{U_1^\dagger} H_1 \cancel{U_1} \overbrace{U_1^\dagger U \rho_0 U^\dagger U_1}^{\rho_t^I} - U_1^\dagger H \underbrace{U_1 U_1^\dagger}_{1} U \rho_0 U^\dagger U_1$$

$$+ U_1^\dagger U \rho_0 U^\dagger \underbrace{U_1 U_1^\dagger}_{1} H U_1 - U_1^\dagger U \rho_0 U^\dagger U_1 H_1\Big) =$$

$$= \frac{i}{\hbar}\Big(\big(\underbrace{H_1}_{= U_1^\dagger H_1 U_1} - U_1^\dagger H U_1\big)\rho_t^I + \rho_t^I \underbrace{\big(U_1^\dagger H U_1 - H_1\big)}_{-H_2^I(t)}\Big)$$

$$U_1^\dagger H_1 U_1 - U_1^\dagger H U_1 = U_1^\dagger \underbrace{(H_1 - H)}_{} U_1$$

$$-U_1^\dagger H_2 U_1 = -H_2^I(t)$$

$$= \frac{i}{\hbar}\left[H_2^I(t), \rho_t^I\right]$$

PRIN di INDET di HEISENBERG

→ MEASUREM UNC REL (info disturbance tradeoff) ← SBAGLIATA

→ PREPARATION UNC RELATION

SBAGLIATA: una misura di un osservabile X provoca un disturbo su una osserv coniugata P

"microscopio di Heisenb" ← OK

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

ma non è un effetto generale

cfe → quantum erasure

vedremo

GIUSTO: NON si riferisce al disturbo

↳ riferiscono alla preparazione

- "se misuro A e B in un set di sistemi preparati nello stesso stato ⇒ $\Delta A \Delta B \geq \dots$"

  $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$

- "se preparo un sistema con indet ΔA sull'oss. A ⇒ una misura di B ha un'incertezza ΔB t.c. $\Delta A \Delta B \geq \dots$"

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}|\langle \underbrace{[x,P]}_{i\hbar} \rangle| = \frac{\hbar}{2}$$

ROBERTSON

$$\boxed{\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle [A,B] \rangle|}$$

A, B osservabili

$$\Delta O = \sqrt{\Delta^2 O} \qquad \Delta^2 O = \langle O^2 \rangle - \langle O \rangle^2$$

$$C \overset{\text{def}}{=} A - \langle A \rangle \qquad D = B - \langle B \rangle$$

$$\Delta^2 A \, \Delta^2 B = \langle C^2 \rangle \langle D^2 \rangle \underset{\text{BSF}}{=} \langle \psi | C^2 | \psi \rangle \langle \psi | D^2 | \psi \rangle$$

$$\geq \langle\psi|C^+D|\psi\rangle\langle\psi|D^+C|\psi\rangle = |\langle\psi|CD|\psi\rangle|^2$$

$C=C^+,\ D=D^+$

$$\langle\varphi|\varphi\rangle\langle\vartheta|\vartheta\rangle \geq \langle\varphi|\vartheta\rangle\langle\vartheta|\varphi\rangle$$

C.S.

$|\varphi\rangle = C|\psi\rangle$

$|\vartheta\rangle = D|\psi\rangle$

$$\langle\psi|CD|\psi\rangle = x+iy \qquad \{C,D\}_+ = CD+DC$$

$$x = \frac{1}{2}\langle\psi|CD+DC|\psi\rangle = \frac{1}{2}\langle\{C,D\}_+\rangle$$

$$iy = \frac{1}{2}\langle\psi|CD-DC|\psi\rangle = \frac{1}{2}\langle[C,D]\rangle$$

$$|\langle\psi|CD|\psi\rangle|^2 = x^2+y^2 \geq y^2 = \frac{1}{4}|\langle[C,D]\rangle|^2$$

butto via l'anticommut

(se lo tengo → rel indet di Schroedinger)

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq \frac{1}{4}|\langle[C,D]\rangle|^2 = \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2$$

RELAZ indet tempo-energia:

$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ ← non si ottiene da Robertson: non ∃ osservabile tempo

analisi di Fourier

$$\boxed{\Delta\omega\,\Delta t \geq \frac{1}{2}} \rightarrow E = \hbar\omega \qquad \Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Planck

banda: larghezza in freq di un impulso

durata dell'impulso

SBAGLIATO: "ci vuole un tempo Δt per misurare energia con precisione ΔE" $\rightarrow$ controesempi

Aharonov-Bohm

GIUSTA: Δt è il tempo minimo che un sistema con spread in en ΔE impiega a evolvere ad uno stato ortogonale $|\psi_0\rangle \rightarrow |\psi(t)\rangle = |\varphi\rangle$

$$\langle\psi_0|\varphi\rangle = 0$$

$|\psi(t)\rangle = U_t|\psi_0\rangle$ $\qquad$ $\Delta t = t$ intervallo minimo per avere $|\psi_0\rangle \rightarrow |\varphi\rangle = U|\psi_0\rangle$

$$\langle\varphi|\psi_0\rangle = 0$$

caso di autost en $\Delta E = 0 \Rightarrow \Delta t = +\infty$

$U = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$ energia legata a freq (ip Planck)