OTTICA Q 13/10/20

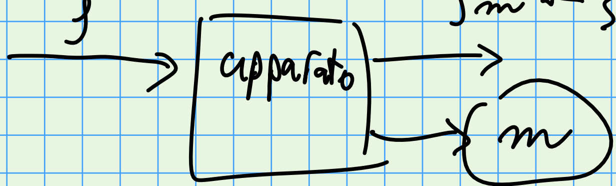
LABORATORIO → NO OP AUTOAGGIUNTO

↓

APPARATO di MISURA : in → sist quant ρ

out → risultato della mis "m"

→ siste quant ρ_m



ρ_m ← sistema dopo la misura

etichetta → info classica

$\rho \longrightarrow \rho_m$ "collasso della fn d'onda"

DESCRIZIONE MATEMATICA

- POVM (positive operator valued measure) (se vogliamo solo la statistica dei risultati
- STRUMENTO → dà la statistica + stato dopo la misura

def $\boxed{\text{POVM}}$ è set di op Π_m t.c.

1. $\Pi_m \geq 0 \quad \forall m$ op positivi ⇒ autoaggiunti
2. additività M è un set di indici ⇒ $\Pi_M = \sum_{i \in M} \Pi_{m_i}$
3. normalizzazione $\sum_{i \in I} \Pi_{m_i} = \mathbb{1}$ I tutti i possibili valori

ad ogni apparato associamo POVM con m_i i possibili output dell'apparato

REGOLA BORN v.2 BSF 2 : $\boxed{P(m_i) = \mathrm{Tr}[\Pi_{m_i} \rho]}$

① $\to$ $P(m) \geq 0$ $\quad \rho \geq 0 \quad \Pi_{m_i} \geq 0 \ \forall m_i$

② $\to$ legge di prob congiunta per risultati mutuam esclusivi $P(m_0 \cup m_1) = P(m_0) + P(m_1) = Tr[\Pi_{m_0}\rho] + Tr[\Pi_{m_1}\rho] = Tr\left[\underbrace{(\Pi_{m_0} + \Pi_{m_1})}_{\Pi_{m_0 \cup m_1}}\rho\right]$ $\quad Tr\,\rho = 1$

③ $\to$ $P(\forall m) = 1$ $\quad P(\forall m) = \sum_{m_i} P(m_i) = 1 = Tr\left[\underbrace{\sum_{i \in I} \Pi_{m_i}}_{= 1}\rho\right]$

POSTULATO 4 (MISURA) $\to$ BSF $\boxed{P(o_m) = Tr[\rho\,|m\rangle\langle m|]}$

$O = \sum_m o_m |m\rangle\langle m|$ $\quad |m\rangle$ avett di O

o_m aval di O

POVM $\to$ BSF v.2 $\boxed{P(m) = Tr[\rho\,\Pi_m]}$

def MISURA PROIETTIVA $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ Π_m sono tutti proiettori

$\Pi_m^+ = \Pi_m \quad \Pi_m \geq 0$

$\Pi_m^2 = \Pi_m$

$\forall$ osservabile può essere associato a misura proiettiva

$$O = \sum_{m,k} o_m \underbrace{|m,k\rangle\langle m,k|}$$

k: indice di degenerazione

$\sum_k |m,k\rangle\langle m,k|$ è PROIETTORE

che proietta sull'autospazio relativo all'aval o_m

BSF v2 $\Longrightarrow$ BSF v1 (postulato)

se POVM = PROIETTORI $\Rightarrow$ misuro O

se POVM <u>non</u> è proiettiva $\Rightarrow$ $\exists$ una estensione dello sp di Hilbert del sistema t.c. l'apparato misura un osservabile (misura proiettiva) sullo spazio esteso

$\uparrow$ t. di Naimark

BSF v1 $\Rightarrow$ (estensione) BSF v2

t Naimark:

Data una POVM Π_m $\Rightarrow$ $\exists$ un'estensione $\overset{\text{sp di sistema}}{\mathcal{H}_S} \otimes \overset{\text{spazio aggiuntivo}}{\mathcal{H}_P}$

$\exists$ uno stato puro $|\psi_p\rangle \in \mathcal{H}_P$

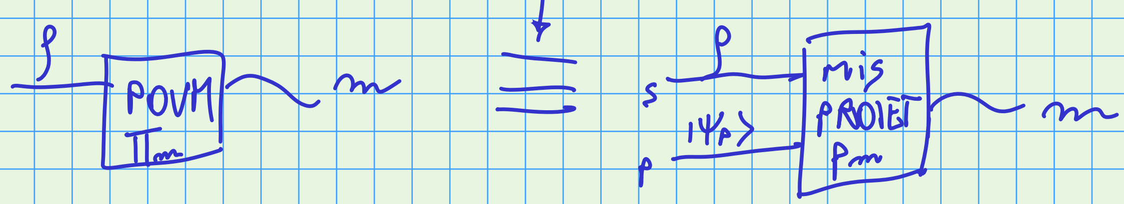
$\exists$ misura proiettiva P_m su $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_P$

t.c. $\Pi_m = \mathrm{Tr}_p\left[(\mathbb{1}_S \otimes |\psi_p\rangle\langle\psi_p|)\, P_m\right]$

$$p(m) \overset{\text{BSF v2}}{=} \mathrm{Tr}\left[\overset{\text{POVM}}{\Pi_m}\, \rho\right] \overset{\text{t. Naimark}}{=} \mathrm{Tr}\left[\underset{\in \mathcal{H}_S}{\rho}\, \mathrm{Tr}_p\left[\mathbb{1}_S \otimes |\psi_p\rangle\langle\psi_p|\, P_m\right]\right] =$$

$$= \underbrace{\mathrm{Tr}_S\left[\mathrm{Tr}_p\right.}\left.\left[(\rho \otimes |\psi_p\rangle\langle\psi_p|)\, P_m\right]\right] = \underbrace{\mathrm{Tr}\left[(\rho \otimes |\psi\rangle\langle\psi|)\, P_m\right]}_{\text{BSF v1}}$$

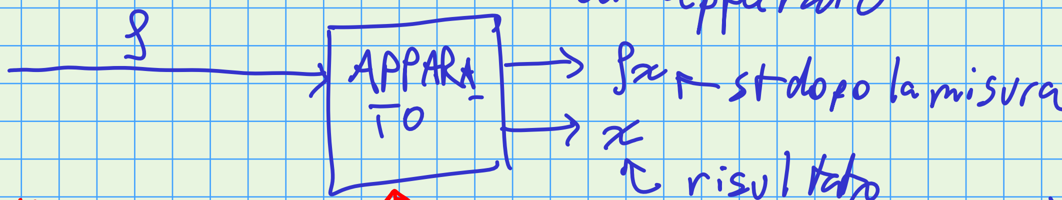
$\mathrm{Tr}_{SP} = \mathrm{Tr}$



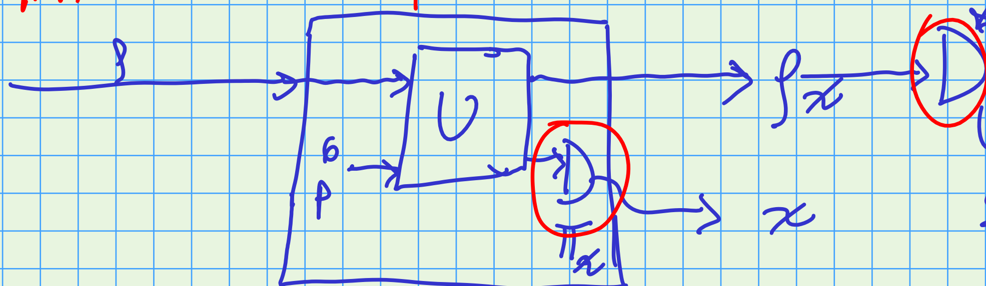
STRUMENTO → descriz del sist se vogliamo anche l'evoluzione del sistema (oltre alla statistica risultati)

L'estrazione di info, modifica lo stato del sistema
(stato ≡ informazione che abbiamo sul sistema)

State reduction dalla regola di Bayes
(th. di Ozawa) → modello di apparato a misura indiretta



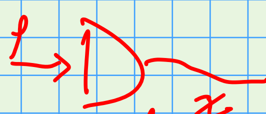
MMI:



misura del sistema dopo la 1° misura → Π_y

U interazione tra sistema e probe

state reduction



= apparato distrugge il sistema

σ → st iniziale della sonda P (probe)

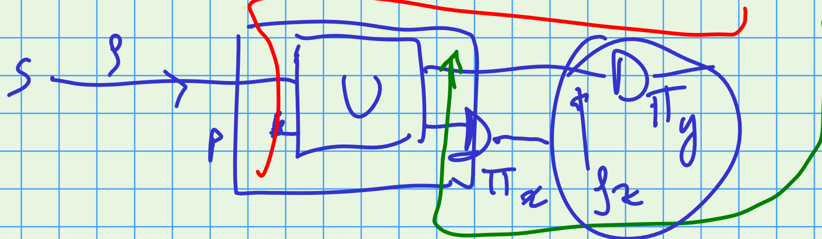
U → unitario che descrive accoppiamento sistema-sonda

1° misura → Π_x POVM

2° misura Π_y su' sistema in uscita dalla 1°

Prob congiunta di ottenere risul x, y

$$p(x,y) \underset{\uparrow\ \text{BSF}\sim 2}{=} \mathrm{Tr}\Big[\overbrace{U\underbrace{(\rho\otimes\sigma)}_{\text{st iniz}}U^{\dagger}}^{\text{st dopo l'interaz}}\ \overbrace{(\Pi_x^{P}\otimes\Pi_y^{S})}^{\text{post prodotto tensore}}\Big] =$$



$$= \mathrm{Tr}\left[\mathrm{Tr}_p \left[U(\rho \otimes \sigma) U^\dagger \left(\Pi_p^x \otimes \Pi_s^y \right) \right] \right] =$$

$$= \mathrm{Tr}\left[\mathrm{Tr}_p \left[U(\rho \otimes \sigma) U^\dagger \left(\Pi_p^x \otimes \mathbb{1}_s \right) \right] \Pi_s^y \right] = p(x,y)$$

prob di avere x su probe

$$P(x,y) = P(y|x)\, p(x) \overset{BSF \approx 2}{=} \mathrm{Tr}_s\left[\rho_x \Pi_y \right] p(x)$$

prob condiz di avere y su sistema posto che ho avuto x sul probe

stato del sistema (condiz dal fatto che probe ha dato x)

$$p(x)\, \mathrm{Tr}\left[\rho_x \Pi_y \right] = \mathrm{Tr}_s \left[\mathrm{Tr}_p \left[U(\rho \otimes \sigma) U^\dagger (\Pi_x \otimes \mathbb{1}) \right] \Pi_y \right]$$

vale $\forall\, \Pi_y$

$$\Rightarrow p(x)\, \rho_x = \mathrm{Tr}_p \left[U (\underbrace{\rho \otimes \sigma}) U^\dagger (\Pi_x \otimes \mathbb{1}) \right]$$

$$\rho_x = \frac{\mathrm{Tr}_p[\quad]}{p(x)} \leftarrow \text{collasso}$$

$$I_x[\rho] = p(x)\, \rho_x$$

← STRUMENTO

$$I_x[\rho] \overset{def}{=} \mathrm{Tr}_p \left[U(\rho \otimes \sigma) U^\dagger \left(\Pi_p^x \otimes \mathbb{1}_s \right) \right] \leftarrow \boxed{\begin{matrix} f_n & \text{MMI} \\ U, & \sigma, \Pi_x \end{matrix}}$$

$$p(x) = \mathrm{Tr}\left[I_x[\rho] \right]$$

Tr di ambo i m

- STRUMENTO in termini degli op di KRAUS

$$\rho_x P(x) = \mathrm{Tr}_p\left[U(\rho\otimes\sigma)U^\dagger(1\!\!1_S\otimes P_x)\right] =$$

scelgo σ puro + Naimark $\Rightarrow$ P_m è proiettivo

$\sigma = |\varphi\rangle\langle\varphi|$

$$P_x = \sum_n |n^{(x)}\rangle\langle n^{(x)}| \qquad n \text{ degenerazione}$$

$$= \mathrm{Tr}_p\left[U\left(\rho\otimes|\varphi\rangle_p\langle\varphi|\right)U^\dagger\left(1\!\!1_S\otimes\sum_n |n^{(x)}\rangle\langle \underbrace{n^{(x)}}_{\delta_{ni}}|\right)\right]$$

$$= \sum_i {}_p\langle i|\, U\left(\rho\otimes|\varphi\rangle\langle\varphi|\right)U^\dagger\; 1\!\!1_S\otimes\sum_n |n^{(x)}\rangle\langle n^{(x)}|i\rangle_p$$

def Tr_p

Tr_p è indip per scelta di base
$\Rightarrow$ scelgo base che contiene $|n^{(x)}\rangle$

$$= \sum_n \langle n^{(x)}|U\left(\rho\otimes|\varphi\rangle_p\langle\varphi|\right)U^\dagger 1\!\!1_S|n^{(x)}\rangle =$$

$$= \sum_n {}_p\langle n^{(x)}|\underset{SP}{U}|\varphi\rangle_p\; \underset{S}{\rho}\; \overbrace{{}_p\langle\varphi|\underset{SP}{U^\dagger}|n^{(x)}\rangle_p}^{\text{op di sistema}} =$$

$$= \sum_n A_n^{(x)}\,\rho\,\left(A_n^{(x)}\right)^\dagger = \rho_x\, P(x)$$

$\longrightarrow A_n^{(x)} \overset{\text{def}}{=} {}_p\langle n^{(x)}|U|\varphi\rangle_p$ = op di sist $\leftarrow$ op di KRAUS

$$\boxed{\rho_x = \frac{\cancel{\sum_n} A_n^{(x)}\,\rho\,A_n^{(x)\dagger}}{p(x)}}$$

$$p(x) = \mathrm{Tr}\sum_n A_n\,\rho\,A_n^\dagger$$

Tr di ambo i m

STRUMENTO (state reduction) in termini di op di Kraus A

$$\boxed{\sum_{nx} \left(A_n^{(x)}\right)^\dagger A_n^{(x)} = \mathbb{1}}$$, ⇐ def di op di Kraus

$$\sum_{nx} A_n^{(x)\dagger} A_n^{(x)} = \sum_{nx} \langle \varphi | U^\dagger | n^{(x)} \rangle\langle n^{(x)} | U | \varphi \rangle =$$

"$\mathbb{1}$" $|n^{(x)}\rangle$ è base

al variare di n è la base dell'autosp x, sommando anche su x base di tutto sp

$$= {}_p\langle \varphi | \underbrace{U^\dagger U}_{\mathbb{1}_{sp}} | \varphi \rangle_p = {}_p\langle \varphi | \mathbb{1}_{sp} | \varphi \rangle_p = \mathbb{1}_s$$

$A_n^{(x)}$ al variare di n (indice degeneraz) è il set di op di Kraus relativi al risultato x della misura

- SISTEMA DOPO MISURA RIMANE in un autost dell'osservabile misurato
  ↳ caso particolare dello strumento
  senza degenerazione $\quad O = \sum_x o_x \, |x\rangle\langle x|$

$$\rho_x = \frac{A_x \rho A_x^\dagger}{\mathrm{Tr}\left[A_x \rho A_x^\dagger\right]} \leftarrow p(x) \quad \rightarrow \quad \rho_x = \frac{|x\rangle \overbrace{\cancel{\langle x| \rho |x\rangle}}^{p(x)} \langle x|}{\cancel{p(x)}} = |x\rangle\langle x|$$

$p(x) = \langle x | \rho | x \rangle$ BSF

strumento che lascia il sist in un autost di O

$$\boxed{A_x = |x\rangle\langle x|}$$ è op di Kraus

$$\sum_x A_x^\dagger A_x = \sum_x |x\rangle\underbrace{\langle x | x\rangle}_{1}\langle x| =$$

$|x\rangle$ è base

$$= \sum_x |x\rangle\langle x| = \mathbb{1}$$

$\rho_x = |x\rangle\langle x|$

dopo misura sist proiettato nell'autost $|x\rangle$