OTTICA QUANTISTICA 6/10/20

Lorenzo Maccone maccone@unipv.it

www.otticaquantistica.it/people/maccone/otticaq

Testi:

Scully, Zubairy, "Q Optics", Cambridge UP

Gerry, Knight, "Introductory q optics" " "

Mandel, Wolf "Optical coherence and q. optics" "

INTRODUZIONE

OUTLINE:

1. RIPASSO MQ → notazione
2. Quantizzaz campo elm
3. Metodi Algebrici
4. St quantistici della radiazione
5. interferometria
6. Sistemi quantistici
7. Teoria della misure

RIPASSO di MQ : percorso assiomatico

$$\boxed{\text{ESPERIM}} \xrightarrow{\text{INDUZ}} \boxed{\text{LEGGI FISICHE}}$$

$$\updownarrow$$

$$\boxed{\text{ASSIOMI}} \xrightarrow{\text{DEDUZIONE}} \boxed{\text{TEORIA FISICA}}$$

POSTULATO 1 : stati e osservabili → Ozawa AOP 311, 350

> ⓐ Lo stato di un sistema è descritto da un vettore unitario $|\psi\rangle$ in un "appropriato" sp. di Hilbert complesso

Sistema → oggetto dell'analisi

Stato → descrizione matematica del sistema
INFORMAZIONE

Spazio di Hilbert complesso $\xrightarrow{\text{def}}$

① Sp vettoriale lineare complesso
$|u\rangle, |v\rangle \in \mathcal{H} \Rightarrow$
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \alpha|u\rangle + \beta|v\rangle \in \mathcal{H}$

② $\exists$ prodotto scalare
$\langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle^*$
t.c. $\forall |w\rangle \quad \langle w|u\rangle \geq 0$
$= 0 \Leftrightarrow |u\rangle = 0_v$

③ completezza: sequenze di Cauchy convergono ad un vettore $\in \mathcal{H}$

④ separabile $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ base discreta

SP FINITO DIM → KET $|\psi\rangle$ è vettore colonna
BRA $\langle\phi|$ " " riga

$\langle\phi|\psi\rangle$ prod righe × colonna

def vettore unitario $\langle\psi|\psi\rangle = 1$

appropriato → il postulato non specifica quale spazio di Hilbert → dimensione è l'unica cosa importante (sp Hilbert a stessa dim sono isomorfi)

DIM → = al numero di gradi di libertà

(1a) → $\cancel{|\psi\rangle}$ contiene tutta l'info che abbiamo sul sistema

def MATRICE DENSITÀ: info parziale:
il sistema è nello st $|\psi_i\rangle$ con prob p_i
lo stato del sist è dato da una matrice (operatore) densità

$$\rho = \sum_i p_i \, |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

$$|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

prod righe x colonna di vett colonna x vett riga = matrice

dimostreremo dal postulato 5

Def ASTRATTA di MATRICE DENSITÀ

ρ è STATO (MAT DENSITÀ) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\rho \geq 0 \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ aval ≥ 0
$\mathrm{Tr}\,\rho = 1$

$$\mathrm{Tr}\, O \overset{def}{=} \sum_i \langle i | O | i \rangle$$

- invariante per scelta di base
- invarianza per permutaz ciclica

$$\mathrm{Tr}[ABC] = \mathrm{Tr}[BCA] = \mathrm{Tr}[CAB]$$

$$\mathrm{Tr}[ABC] \stackrel{def}{=} \sum_i \langle i | AB\overset{\mathbb{1}}{\overset{\vee}{}}C | i \rangle = \sum_{ij} \langle i | AB | e_j \rangle \langle e_j | C | i \rangle =$$

$$|e_i\rangle \text{ base} \iff \sum_i |e_i\rangle\langle e_i| = \mathbb{1}$$

Risoluzione spettrale dell'identità

$$= \sum_{ij} \langle e_j | C \underbrace{\sum_i | i \rangle\langle i |}_{=\mathbb{1}} AB | e_j \rangle$$

$$= \sum_j \langle e_j | CAB | e_j \rangle \stackrel{def}{=} \mathrm{Tr}[CAB]$$

Stesso trucco per dim invarianza per scelta di base

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = |\psi\rangle\langle\psi|$$

abbiamo massima info sul sist

$p_l = 1 \quad p_{i \neq l} = 0$

STATO PURO $\iff$ st del sist è $|\psi\rangle$

$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$

mat densità $\rightarrow$ più generali $\begin{cases} \text{info tot} \rightarrow \text{st puro} \\ \text{" parziale} \rightarrow \text{st misto} \end{cases}$ mistura

LA DECOMPOSIZIONE NON è UNICA (ST MISTI)

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \sum_j p_j' |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$$

è un effetto quantistico

sistema in stato $|\psi_i\rangle$ con prob p_i è LO STESSO del sistema in stato $|\phi_i\rangle$ " " p_i'

la dimostreremo dal postulato di misura

(1b) gli osservabili del sistema sono descritti da appropriati operatori autoaggiunti.

def osservabile: è una grandezza fisica che posso misurare

def operatore: fn lineare di vettori

$$\underbrace{O}_{\text{righe x colonna}}|\psi\rangle = |\psi'\rangle \qquad \langle\psi|O^{+} = \langle\psi'|$$

op autoaggiunto $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ • $\forall |u\rangle, |v\rangle \in \mathcal{H}$
$\langle u|O|v\rangle = \langle v|O|u\rangle^{*}$
• O, O^{+} hanno lo stesso dominio

O autoaggiunto $\Rightarrow$ aval $\in \mathbb{R}$
avett sono un set completo

$$O = \sum_i o_i \, |o_i\rangle\langle o_i| \Rightarrow o_i \in \mathbb{R}$$

o_i aval di O

$|o_i\rangle$ avett " "

$|o_i\rangle$ sono base $\Leftrightarrow$ $\sum_i |o_i\rangle\langle o_i| = \mathbb{1}$

DESCRITTI → c'è un legame tra il risultato della misura di un osservabile e l'op autoagg
↳ postulato 4

APPROPRIATI → il postulato non specifica quali op associare ad un osservabile
↳ postulato di misura + principio corrisp

ASSIOMI $\rightleftarrows$ PRINCIPI FISICI ;

complementerarietà → sovrapposiz

complesso → polarizz circolare

$\boxed{\text{RAPPRESENTAZIONE}}$ → sviluppare stati e op su una base

es rappres posiz: base di autost posiz $\mathbb{1} = \int dx |x\rangle\langle x|$

$$|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \int dx\, |x\rangle \underbrace{\langle x|\psi\rangle}_{\psi(x)} = \int dx\, \psi(x)\, |x\rangle$$

$\psi(x)$ = f. d'onda

RAPPRES di $|\psi\rangle$ della posiz è $\psi(x)$

$$O = \mathbb{1}\, O\, \mathbb{1} = \int dx\, dx'\, |x\rangle \underbrace{\langle x| O |x'\rangle}_{O_{xx'}} \langle x'| =$$

$$\int dx\, dx'\, O_{xx'}\, |x\rangle\langle x'|$$

$$O \Leftrightarrow O_{xx'}$$

POSTULATO 2: postulato sist composti:

$\boxed{\text{(a) Lo spazio di Hilbert di un sistema composto è il prod tensore degli spazi delle componenti} \quad \mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B}$

sistema composto: è il sistema che si ottiene dall'unione dei sistemi componenti

prod tensore

base $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

$$|v_A\rangle \otimes |v_B\rangle \overset{def}{=} |v_A\rangle|v_B\rangle \overset{def}{=} |v_A v_B\rangle$$

$\neq |v_B\rangle \otimes |v_A\rangle$

$$|v_A\rangle \otimes |v_B\rangle = \underbrace{\begin{pmatrix} v_{A_1} \\ v_{A_2} \\ \vdots \end{pmatrix}}_{=|v_A\rangle} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} v_{B_1} \\ v_{B_2} \\ \vdots \end{pmatrix}}_{=|v_B\rangle} = \begin{pmatrix} v_{A_1} |v_B\rangle \\ v_{A_2} |v_B\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} v_{A_1} v_{B_1} \\ v_{A_1} v_{B_2} \\ v_{A_1} v_{B_3} \\ \vdots \\ v_{A_2} v_{B_1} \\ \vdots \end{pmatrix}$$ vettore colonna di dim $d_A \cdot d_B$

non tutti i vettori $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ sono della forma $|v_A\rangle|v_B\rangle$

$$\underbrace{|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B}_{\neq\, |\psi_A\rangle |\phi\rangle_B} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

$$O \otimes Q = \begin{pmatrix} o_{11} Q & o_{12} Q \\ o_{21} Q & \cdots \\ & \cdots \end{pmatrix} \neq Q \otimes O$$

$$\neq \underbrace{O \cdot Q}_{\text{righe} \times \text{colonna}}$$

di solito non si sottintende $\otimes$

$$O \otimes Q \neq O\, Q$$

$$O_A\, Q_B = O_A \otimes Q_B$$