FISICA 2 17/12/20

integraz di una k-forma su una varietà a dim $d > k$ integrata su una sottovarietà di dim k.

$$\int_S {}^k\omega \quad \text{(S: dim } k\text{)}$$

→ $\boxed{\text{parametrizzo } S}$ in termini di k variabili ⇒ mi riconduco al caso di k-forma su una varietà di dim k

magari bisogna farlo a triangoli

solo per iper superfici orientabili

caso 2-forma (su $\mathbb{R}^3$) (coord cartes)

$${}^2\omega = A\,{}^1dx \wedge {}^1dy + B\,{}^1dy \wedge {}^1dz + C\,{}^1dz \wedge {}^1dx$$

base di 2-forme

$$\int_S {}^2\omega = \int_S {}^1dx \wedge {}^1dy\, A + {}^1dy \wedge {}^1dz\, B + {}^1dz \wedge {}^1dx\, C =$$

(S: dim 2)

$=$

parametrizzo S in termini di due variabili u, v

$$x = x(u,v)$$
$$y = y(u,v) \quad \forall (x,y,z) \in S$$
$$z = z(u,v)$$

⇓

$$\left.\begin{aligned} {}^1dx &= \frac{\partial x}{\partial u}\,{}^1du + \frac{\partial x}{\partial v}\,{}^1dv \\ {}^1dy &= \frac{\partial y}{\partial u}\,{}^1du + \dots \\ {}^1dz &= \dots \end{aligned}\right\} \Rightarrow {}^1dx \wedge {}^1dy =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,{}^1du + \frac{\partial x}{\partial v}\,{}^1dv\right)}_{dx} \wedge \underbrace{\left(\frac{\partial y}{\partial u}\,{}^1du + \frac{\partial y}{\partial v}\,{}^1dv\right)}_{{}^1dy} \overset{du \wedge du = 0}{=} {}^1du \wedge {}^1dv \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

$dv \wedge du = -du \wedge dv$

$$= du \wedge dv \ \det|J_{xy \to uv}|$$

$$^1dy \wedge {}^1dz = \det|J_{yz \to uv}| \ {}^1du \wedge {}^1dv$$

$$\int_S {}^1du \wedge {}^1dv = \int_S du\, dv$$

k forma su un ipervolume di dim

$$\boxed{\int_S {}^2\omega_{\vec{x}} = \int_S du\, dw\, dv \ A(\vec{r}(u,v)) \det|J_{xy \to uv}| + B(\vec{r}(u,v)) \det|J_{yz \to uv}| + C \det|J_{zx \to uv}|}$$

il prod wedge contiene nascosti gli Jacobiani

DUALITÀ TRA FORME in $\mathbb{R}^3$ e VETTORI

le 1-forme sono duali a un vettore

$$^1\omega = \sum_i \omega_i \, {}^1dx_i$$

base di 1-forme

$^1\omega$ è duale al vettore

$$\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2 \dots \omega_d)$$

2-forme in $\mathbb{R}^3$ sono duali a vettori di $\mathbb{R}^3$

hanno dim $\binom{d}{k} = \binom{3}{2} = 3$

coord cartes

$$^2\omega = \omega_z \, {}^1dx \wedge {}^1dy + \omega_x \, {}^1dy \wedge {}^1dz + \omega_y \, {}^1dz \wedge {}^1dx$$

è duale al vettore $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ in coord cartes

1-forme e 2-forme sono duali a vettori in $\mathbb{R}^3$

0-forme → scalare → è duale a uno scalare

3-forme in $\mathbb{R}^3$ $\quad {}^3\omega = \omega \; \boxed{{}^1dx \wedge {}^1dy \wedge {}^1dz}$

↓

duali a uno scalare ω

è l'unico (a meno di permutaz) non nullo

$\underbrace{\text{meno di permutaz}}_{\text{cambiano di segno}}$

relazioni tra integrali sulle forme e i vettori duali

integrale di cammino è equivalente ad un integrale di circuitaz del vettore duale

$$\int_\gamma {}^1\omega = \int_\gamma \omega_x {}^1dx + \omega_y {}^1dy + \omega_z {}^1dz \underset{\substack{\omega = \omega(t) \\ \gamma = \gamma(t)}}{=}$$

$$= \int_0^1 dt \left(\underline{\omega_x(\vec{r}(t)) \frac{\partial \gamma_x}{\partial t} + \omega_y(\vec{r}(t)) \frac{\partial \gamma_y}{\partial t} + \omega_z \frac{\partial \gamma_z}{\partial t}} \right)$$

$$= \int_0^1 dt \; \vec{n}(t) \cdot \vec{\omega} \overset{def}{=} \int_\gamma d\vec{r} \cdot \vec{\omega} \leftarrow \text{int di circuitaz}$$

↑ versore tangente a γ nel punto t

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial t}, \frac{\partial \gamma_y}{\partial t}, \frac{\partial \gamma_z}{\partial t} \right)$$

$$\int_S {}^2\omega = \int du\,dv \; \underset{A}{\omega_z}(\vec{r}(u,v)) \det \left| J_{xy \to uv} \right| + \underset{B}{\omega_x}(\vec{r}(u,v)) \det \left| J_{yz \to uv} \right|$$

$+\omega_y(\vec{r}(u,v))\det\left|J_{zx\to uv}\right| =$

$$= \int du\,dv \quad \omega_z(u,v)\underbrace{\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right]}_{\text{componente } z \text{ di un versore}} + \dots$$

$\perp$ alla sup S nel punto u,v

$$= \int_S du\,dv \quad \vec{n}\cdot\vec{\omega} = \int_S d^2r\; \vec{n}\cdot\vec{\omega} \leftarrow$$

$\int_S {}^2\omega$

int di flusso di $\vec{\omega}$ attravs

duale

$\vec{n}$ ↑ versore $\perp$ a S in u,v

$$\int_V {}^3\omega = \int_V {}^1dx \wedge {}^1dy \wedge {}^1dz \quad \omega = \int_V dx\,dy\,dz\; \omega = \int d^3r\; \omega$$

ω ↑ coeffic -> duale 3-forma

int di 1-forma su un percorso $\longrightarrow$ int di circuitaz del duale

" " 2 " " una sup S $\longrightarrow$ int del flusso attrav S del duale

" " 3- " " un vol V $\longrightarrow$ int di vol del campo scalare duale di ${}^3\omega$

STAR di HODGE in $\mathbb{R}^3$

è un isomorfismo tra 1-forme e 2-forme che hanno lo stesso duale

$$\left.\begin{array}{l} \text{se } {}^1\omega \text{ è duale a } \vec{\omega} \\ \text{se } {}^2\omega \text{ '' '' '' } \vec{\omega} \text{ (uguale)} \end{array}\right\} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{l} * {}^1\omega = {}^2\omega \\ * {}^2\omega = {}^1\omega \end{array}$$

$$**\,{}^1\omega = {}^1\omega \qquad **\,{}^2\omega = {}^2\omega$$

$$* {}^0\omega = {}^3\omega \overset{def}{\Longleftrightarrow}$$ ${}^0\omega$ è duale a $\omega = {}^0\omega$

${}^3\omega$ è duale a ω cioè

$${}^3\omega = \omega \, {}^1dx_1 \wedge {}^1dx_2 \wedge {}^1dx_3$$

$$\boxed{\begin{aligned} * {}^1dx &= {}^1dy \wedge {}^1dz \\ * {}^1dy &= {}^1dz \wedge {}^1dx \\ * {}^1dz &= {}^1dx \wedge {}^1dy \\ * {}^1dx \wedge {}^1dy \wedge {}^1dz &= 1 \end{aligned}}$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

t. di Stokes generalizzato

$$\int_R d\,{}^p\omega = \int_R \underbrace{{}^1\nabla \wedge {}^p\omega}_{(p+1)\text{-forma}} = \int_{\partial R} {}^p\omega$$

R dim $p+1$ compatta e orientabile

↳ possiede un bordo ∂R

casi particolari: 0-forma su $\mathbb{R}$ $$\int_C d\,{}^0f = \int_a^b dx \frac{\partial f}{\partial x} = f(b) - f(a)$$

0-forma definita in $\mathbb{R}^3$

$$\int_\gamma {}^0d\,{}^0f = \int_\gamma {}^1\nabla \wedge {}^0f = \int_\gamma {}^1dx\,\frac{\partial f}{\partial x} + {}^1dy\,\frac{\partial f}{\partial y} + {}^1dz\,\frac{\partial f}{\partial z} =$$

$${}^1\nabla = {}^1dx\,\frac{\partial}{\partial x} + {}^1dy\,\frac{\partial}{\partial y} + {}^1dz\,\frac{\partial}{\partial z}$$

$$= \int_\gamma d\vec{r}\cdot\vec{\nabla} f$$

è int su cammino del vett duale: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \vec{\nabla} f$

$$= f(\vec{b}) - f(\vec{a})$$

$\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono l'inizio e la fine di γ

t. Stokes gen

t del gradiente

1-forma def su $\mathbb{R}^3$, ${}^1\omega$

$$\int_S {}^1\nabla \wedge {}^1\omega = \int \underbrace{\left({}^1dx\,\frac{\partial}{\partial x} + {}^1dy\,\frac{\partial}{\partial y} + {}^1dz\,\frac{\partial}{\partial z}\right)}_{{}^1\nabla} \wedge \underbrace{\left(\omega_x\,{}^1dx + \omega_y\,{}^1dy + \omega_z\,{}^1dz\right)}_{{}^1\omega} = \int_S {}^1dx\wedge{}^1dy \underbrace{\left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \overbrace{\frac{\partial \omega_x}{\partial y}}^{dy\wedge dx}\right)}_{(\vec{\nabla}\times\vec{\omega})_z} +$$

$$+ {}^1dy\wedge{}^1dz \underbrace{\left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z}\right)}_{(\vec{\nabla}\times\vec{\omega})_x} + \dots =$$

$$= \int_S {}^1dx\wedge{}^1dy\,(\vec{\nabla}\times\vec{\omega})_z + {}^1dy\wedge{}^1dz\,(\vec{\nabla}\times\vec{\omega})_x + \dots$$

$$= \int du\,dv\;\vec{n}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{\omega}) = \int_S d^2r\;\vec{n}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{\omega})$$

$$= \int_{\partial S} {}^1\omega = \int_{\partial S} d\vec{r}\cdot\vec{\omega}$$

t Stokes gener

t Stokes

2 forma def su $\mathbb{R}^3$

$$\int_V \overset{1}{\nabla} \wedge \overset{2}{\omega} = \int_V \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right) \wedge$$

$$\underbrace{\left(\omega_z \overset{1}{dx} \wedge \overset{1}{dy} + \omega_y \, dz \wedge dx + \omega_x \, dy \wedge dz \right)}^{\overset{2}{\omega}}$$

$dy \wedge dz \wedge dx = dx \wedge dy \wedge dz$

$$= \int_V dx \wedge dy \wedge dz \left(\underbrace{\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z}}_{\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega}} \right) =$$

$$= \int_V dx\,dy\,dz \; \vec{\nabla}\cdot\vec{\omega} = \int_V d^3r \; \vec{\nabla}\cdot\vec{\omega} = \int_{\partial V} \overset{2}{\omega} =$$

t Stokes generalizz

$$= \int_{\partial V} d^2r \; \vec{n}\cdot\vec{\omega}$$

t. Gauss

Elettrodinamica in termini delle forme:

campo el $\vec{E} \to \overset{1}{\mathcal{E}}$

$\vec{E} \to \overset{2}{\mathcal{E}} = \overset{2}{D}/\varepsilon_0$

$$\overset{1}{\mathcal{E}} = * \overset{2}{\mathcal{E}}$$

$\overset{2}{D}$ è duale $\vec{D}$ ← vettore spostamento

campo magnetico $\vec{B} \to \overset{1}{B} = \mu_0 \overset{1}{\mathcal{H}}$ ← duale del vettore $\vec{H}$

$\vec{B} \to \overset{2}{B}$

$$\overset{1}{B} = * \overset{2}{B}$$

densità corrente $\vec{j} \longrightarrow {}^2 J$ flusso della corrente

densità di carica $\rho \longrightarrow {}^3 \rho$

Eq di Maxwell con forme: