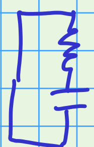
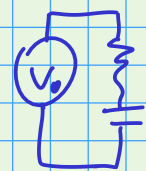
FISICA 2 15/12/20

Circuito RC

caso $t \geq 0$ $V = V_0$

$t < 0$  $t \geq 0$ 

$$\bar{Q} \stackrel{def}{=} Q - \underbrace{C V_0}_{cost}$$

$$V_0 - \frac{Q}{C} = R \frac{dQ}{dt} \rightarrow \frac{d\bar{Q}}{dt} = \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC} \bar{Q}$$

$$\bar{Q}(t) = e^{-t/RC} \bar{Q}_0$$

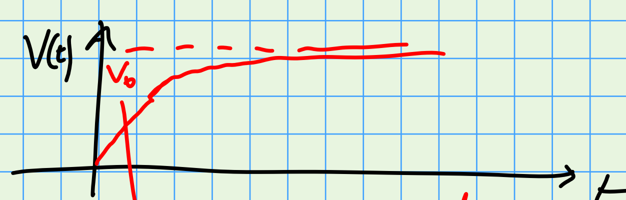
$Q(t=0) = 0$

$$\bar{Q}_0 = \bar{Q}(t=0) = -C V_0$$

$$Q(t) = \bar{Q} + C V_0 = -C V_0 e^{-t/RC} + C V_0 =$$

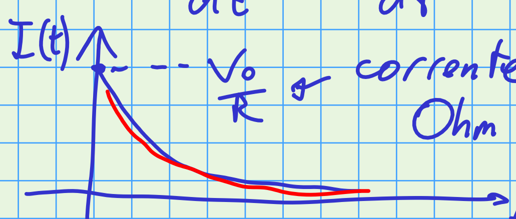
$$= C V_0 \left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

$$V = \frac{Q}{C} \Rightarrow V(t) = V_0 \left(1 - e^{-t/RC}\right)$$



ddp quando il cond è carico

corrente $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} C V_0 \left(1 - e^{-t/RC}\right) = V_0 \frac{e^{-t/RC}}{R}$



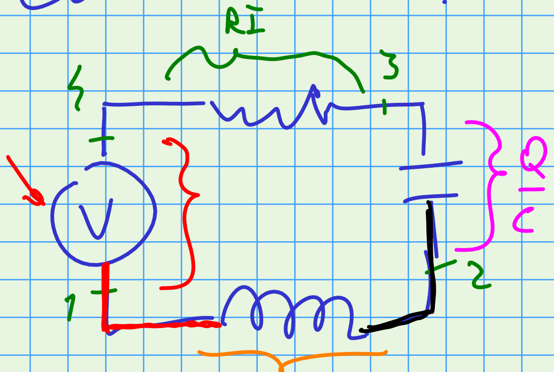
corrente dovuta a legge di Ohm sulla resist

↳ il cond scarico si comporta come un circuito chiuso caso corrente alternata $V = V_0 \cos\omega t$

$\rightarrow$ impedenza per circuito RC

$$\sqrt{R^2 + 1/\omega^2 C^2}$$

Circuito RLC:



$$\underbrace{V_1 - V_4}_{= -V} + \underbrace{V_4 - V_3}_{+RI} + \underbrace{V_3 - V_2}_{+\frac{Q}{C}} + \underbrace{V_2 - V_1}_{L\frac{dI}{dt}} = 0$$

$$V = RI + \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow Q = \int_0^t dt'\, I(t')$$

$$V = RI + \frac{1}{C}\int_0^t dt' I(t') + L\frac{dI}{dt}$$

derivo ambo i m

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I(t) + L\frac{d^2 I}{dt^2}}$$

eq differ al secondo ordine in $I(t)$

$\rightarrow$ RLC è un oscillatore $\rightarrow$ corrente oscilla con freq $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

PROC GENERALE

① divido il circuito in pezzettini

② ddp totale = somma dei pezzettini

③ uso la legge di Ohm generalizzata su ciascun pezzetto

$\Downarrow$

eq differenziale per $I(t)$ data $V(t)$

⑤ risolvere eq differ

ELM con le forme differenziali

↳ scrivere le eq dell'eldinamica in maniera indip dalle coordinate

def 0-forma → campi scalari $\overset{0}{a}$

def 1-forma $\overset{1}{\omega} \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ è un funzionale lineare reale che trasforma un vettore in un numero reale $\overset{1}{\omega}(\vec{v}) \in \mathbb{R}$

$$\overset{1}{\omega}(\vec{v}+\vec{w}) = \overset{1}{\omega}(\vec{v}) + \overset{1}{\omega}(\vec{w})$$

$$\overset{1}{\omega}(g\,\vec{v}) = g\,\overset{1}{\omega}(\vec{v})$$

intuitiva → t Riesz-Frechet

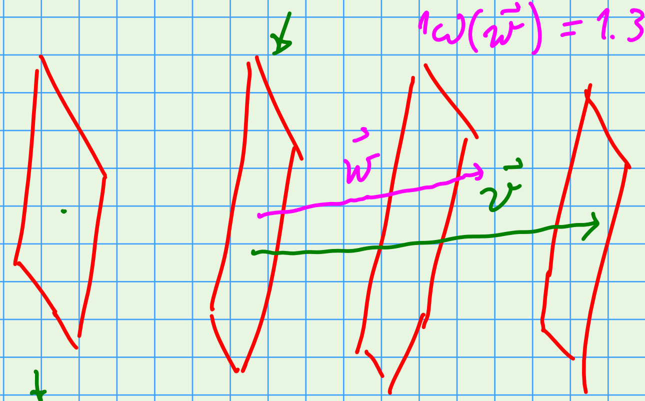
$$\overset{1}{\omega}(\vec{z}) = \langle \vec{\omega}, \vec{z} \rangle = 0$$

è il set di tutti i vettori $\vec{z}$ che sono $\perp$ a $\vec{\omega}$ ⇒ è una superficie

${}^1\omega(\vec{z}') = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

interpretaz intuitiva di ${}^1\omega \to$ un set di superfici parallele tra loro e distanti 1

${}^1\omega$



${}^1\omega(\vec{v}) = \overset{+}{c}$

c è il n di superfici ${}^1\omega$ attraversate da $\vec{v}$

1-forme (su $\mathbb{R}^d$) → è sp vettoriale di dim d → sp DUALE

base dello sp duale si ottiene da una base $\vec{e}_i$ dello sp $\mathbb{R}^d$

scelgo forme ${}^1x_j(\vec{e}_i) = \delta_{ij}$

δ_{ij} delta di Kronecker

${}^1x_j$ è una base dello sp duale

per linearità $\forall$ 1-forma ${}^1\omega$

$${}^1\omega(\vec{v}) = \omega_1\, {}^1x_1(\vec{v}) + \omega_2\, {}^1x_2(\vec{v}) + \dots \omega_d\, {}^1x_d(\vec{v})$$

esempio 1-forma ${}^1\omega$ che restituisce la componente

v_j di $\vec{v}$ lungo $\vec{e}_j$ $\quad {}^1x_j(\vec{v}) = v_j$

Lo sp duale coincide con lo sp di $\vec{\omega}$ di R.T.

def 2-forma $\quad {}^2\omega \overset{def}{\iff}$ funzionale bilineare antisimmetrico: prende 2 vett e dà un n. $\in \mathbb{R}$

$$ {}^2\omega\left(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2, \vec{w}\right) = \lambda_1 {}^2\omega(\vec{v}_1, \vec{w}) + \lambda_2 {}^2\omega(\vec{v}_2, \vec{w}) $$

etc.

antisim $\quad {}^2\omega(\vec{v}, \vec{w}) = -{}^2\omega(\vec{w}, \vec{v})$

def k-forma $\quad {}^k\omega \overset{def}{\iff}$ funzionale k-lineare e antisimm

$$ {}^k\omega\left(\vec{v}_{P_1}, \vec{v}_{P_2} \dots \vec{v}_{P_k}\right) = (-1)^{\nu}\, {}^k\omega(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_k) $$

P_j è permutaz j $\qquad \nu = 0$ se permutaz pari

$\qquad \nu = 1$ " " dispari

PRODOTTO WEDGE di DUE 1-forme: è una 2-forma

$$ {}^1\omega \wedge {}^1\tau(\vec{v}, \vec{w}) \overset{def}{=} \det\begin{pmatrix} {}^1\omega(\vec{v}) & {}^1\tau(\vec{v}) \\ {}^1\omega(\vec{w}) & {}^1\tau(\vec{w}) \end{pmatrix} = $$

(è 2 forma → linearità, antisimmetria)

$$^1\omega(\vec{v})\,{}^1\tau(\vec{w}) - {}^1\omega(\vec{w})\,{}^1\tau(\vec{v})$$

legame con prod vett: wedge è un prod vett nello sp duale $\vec{\omega}, \vec{\tau}$

se ho 2 vettori $\vec{u}, \vec{t}$ vettori nel piano $xy \Rightarrow$

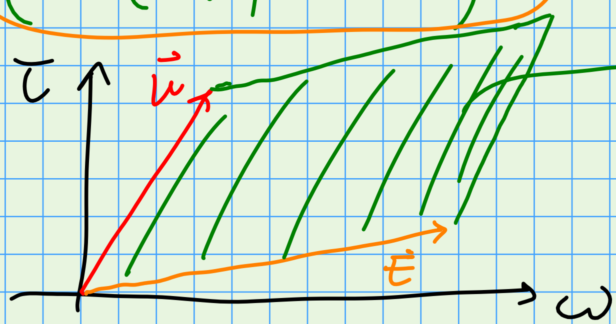
$\vec{u} \times \vec{t}$ è $\parallel$ all'asse z

$$\vec{u} \times \vec{t} = \det\begin{pmatrix} u_x & t_x \\ u_y & t_y \end{pmatrix} \vec{k} = (u_x t_y - u_y t_x)\vec{k}$$

$\vec{u} = \left({}^1\omega(\vec{v}),\ {}^1\tau(\vec{v})\right)$

$\vec{t} = \left({}^1\omega(\vec{w}),\ {}^1\tau(\vec{w})\right)$

$${}^1\omega \wedge {}^1\tau(\vec{v}, \vec{w}) = \pm|\vec{u} \times \vec{t}|$$

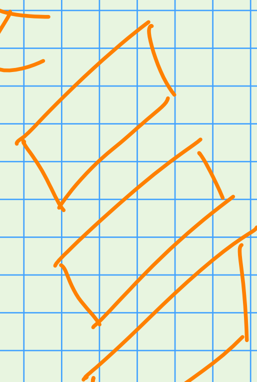


${}^1\omega \wedge {}^1\tau$ è l'area del parallelogramma (con segno $\pm$)

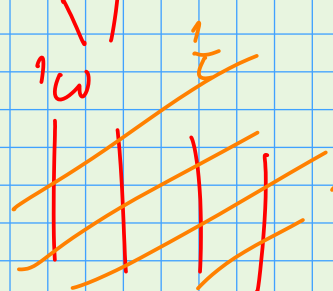
rappresentaz intuitiva del prod wedge:

${}^1\omega$

${}^1\tau$



${}^1\omega \wedge {}^1\tau$



"tubi" dall'intersezione delle sup

cartoni per bottiglie di vino

la forma non è importante $\rightarrow$ l'orientamento e la densità sono importanti

Ogni 2-forma si può scrivere come prodotto wedge tra 1-forme e viceversa

$$\forall \overset{2}{\omega} \qquad \overset{2}{\omega} = \sum_{ij} \overset{\text{coeffic}}{\overset{\downarrow}{a_{ij}}} \; \overset{1}{x}_i \wedge \overset{1}{x}_j$$

Prod wedge di k 1-forme $\rightarrow$ k-forma def

$$\overset{1}{\omega}_1 \wedge \overset{1}{\omega}_2 \wedge \dots \wedge \overset{1}{\omega}_k (\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_k) \overset{def}{=}$$

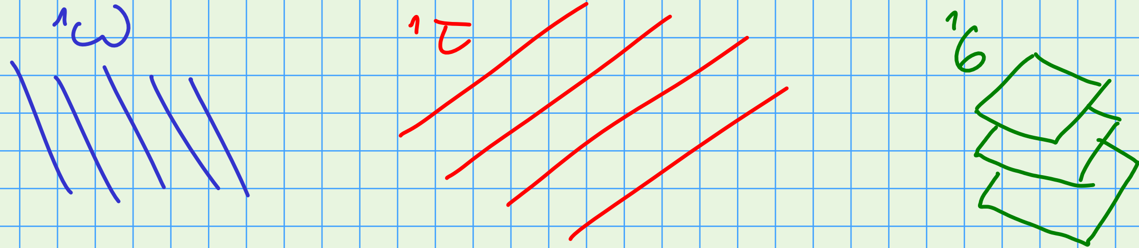
$$= \det \begin{pmatrix} \overset{1}{\omega}_1(\vec{v}_1) & \overset{1}{\omega}_2(\vec{v}_1) & \overset{1}{\omega}_3(\vec{v}_1) & \dots & \overset{1}{\omega}_n(\vec{v}_1) \\ \overset{1}{\omega}_1(\vec{v}_2) & \overset{1}{\omega}_2(\vec{v}_2) & \dots & & \\ & \dots & & & \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{\text{permutaz } p} (-1)^p \, \overset{1}{\omega}_1(\vec{v}_{p_1}) \, \overset{1}{\omega}_2(\vec{v}_{p_2}) \, \overset{1}{\omega}_3(\vec{v}_{p_3}) \dots \Rightarrow \text{è una } k\text{-forma}$$

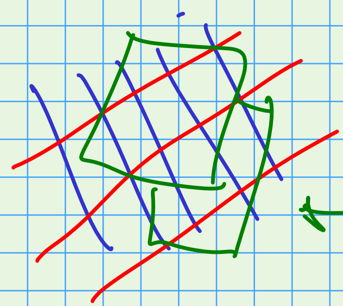
formula di Leibnitz per il determinante

è una estensione del prod vett $\rightarrow$ iper volume orientato nello spazio duale $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3 \dots$

esempio: $K = 3$



$^1\omega \wedge {}^1\tau \wedge {}^1\sigma \rightarrow$ cubetti ottenuti dall'intersez di questi piani



$\leftarrow$ cubetti

la forma dei cubetti non è importante
$\rightarrow$ è importante la densità e l'orientamento

tutte le k-forme si possono scrivere come wedge di 1-forme

$$^k\omega = \sum_{i_1\dots i_k} a_{i_1\dots i_k}\, {}^1x_{i_1}\wedge {}^1x_{i_2}\wedge\dots {}^1x_{i_k}$$

Prod wedge di k-forme per una l-forma è una (k+l)-forma

$$^k\omega\wedge{}^l\tau(\vec v_1,\vec v_2\dots\vec v_{k+l}) \overset{def}{=}$$

$$= \sum_{\substack{\text{permutaz}\\ P}}(-1)^P\, {}^k\omega(\vec v_{P_1},\vec v_{P_2}\dots\vec v_{P_k})\,{}^l\tau(\vec v_{P_{k+1}},\dots\vec v_{P_{k+l}})$$

Forme su spazio $\mathbb{R}^3$: dimensione dello sp vett di una k-forma su $\mathbb{R}^d$ è $\binom{d}{k} = \frac{d!}{k!(d-k)!}$

$d=3$

${}^0\omega$ ha dim $1 = \binom{3}{0}$

base di $\mathbb{R}^3$

${}^1\omega$ " " $3 = \binom{3}{1}$ → base ${}^1x_j(\vec{e}_i) = \delta_{ij}$

per 1-forme

${}^2\omega$ " " $3 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{1!\,2!}$ → base di 2 forme in $\mathbb{R}^3$

${}^1x_i \wedge {}^1x_j$ ←

i	j
1	2
2	3
3	1

${}^3\omega$ " " $1 = \binom{3}{3}$ come prod wedge

${}^1x_i \wedge {}^1x_j \wedge {}^1x_k \neq 0$ solo

i, j, k sono diversi (det di matrice con 2 righe uguali è nullo)

l'unica 3-forma in $\mathbb{R}^3$ è ${}^1x_1 \wedge {}^1x_2 \wedge {}^1x_3$

${}^k\omega$ con $k > 3$ non esiste in $\mathbb{R}^3$

FORMA DIFFERENZIALE di GRADO 1 $\stackrel{def}{=}$ è

un set di 1-forme definite sullo spazio tangente di una varietà M cioè per ogni punto $\vec{x}$ della varietà M si mangia un vett $\vec{\xi}$ dello sp tangente NEL PUNTO $\vec{x}$ e restituisce un numero

$$^1\omega : \bigcup_{\vec{x}} T_{\vec{x}} M \longrightarrow \mathbb{R}$$

sp tangente a M in $\vec{x}$

unione su tutti i punti $\vec{x}$

$$^1\omega_{\vec{x}}(\vec{\xi}) = c$$

è una funzione di 1-forme (funzione di $\vec{x}$)

Notazione 1forma $\equiv$ 1forma differenziale

def sp tangente è lo spazio che contiene le derivate $\vec{\xi}$ dei percorsi $\vec{x}(t) \in M$

introduco percorso $\vec{x}(t) \in M$ con $\vec{x}(0) = \vec{x}$

$$\vec{\xi} = \left.\frac{d\vec{x}(t)}{dt}\right|_{\substack{t=0 \\ \vec{x}}}$$

esempio : il differenziale

$$^1df_{\vec{x}}(\vec{\xi}) \stackrel{def}{=} \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0}$$