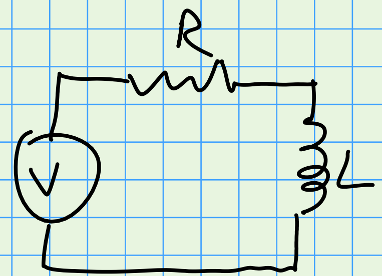
FISICA 2 11/12/20

CIRCUITO RL:

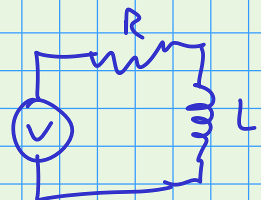


Legge Ohm generaliz:

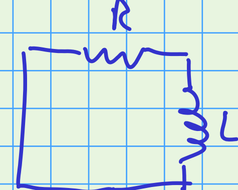
$$V = IR + L\frac{dI}{dt}$$

① al tempo $t=0$ metto $V=0$

$t<0$



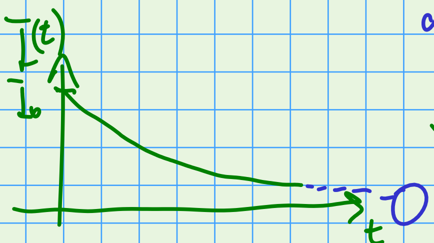
, $t \geq 0$



$t \geq 0$ $\quad IR + L\frac{dI}{dt} = 0 \iff \frac{dI(t)}{dt} = -\frac{R}{L} I(t)$

SOLUZIONE: $\boxed{I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}}$ cost integraz $I_0 = I(t=0)$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = -\frac{R}{L} I(t)$$



← l'energia immagazzinata nel campo mag del solenoide viene dissipata sulla resistenza

$$IR + L\frac{dI}{dt} = 0 \iff RI^2 + LI\frac{dI}{dt} = 0$$

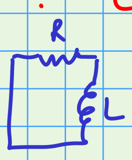
$$RI^2 = -LI\frac{dI}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2\right)$$

potenza dissipata su resist (effetto Joule) → energia del campo mag nella bobina

potenza

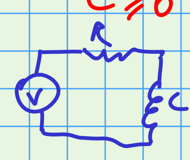
② Caso 2: $t<0$ niente ddp $V=0$ $\quad t \geq 0$ $V = V_0$

$t<0$



in situaz a regime (bobina scarica)

$t \geq 0$

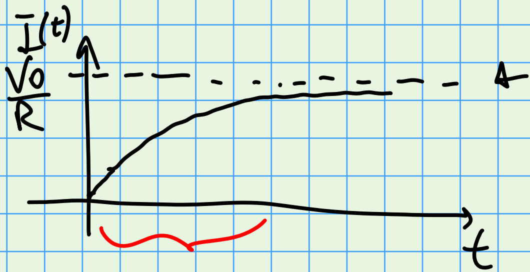


eq diff : $V_0 = IR + L\frac{dI}{dt} \iff \bar{I}R + L\frac{d\bar{I}}{dt} = 0$

$\bar{I} \overset{def}{=} I - \frac{V_0}{R} \Rightarrow \frac{d\bar{I}}{dt} = \frac{dI}{dt}$

$\bar{I} = \bar{I}_0 e^{-\frac{R}{L}t}$ $\quad \bar{I}_0 = \bar{I}(t=0) = I(0) - \frac{V_0}{R} = -\frac{V_0}{R}$

$$I = \bar{I} + \frac{V_0}{R} = -\frac{V_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0}{R} = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$



val asintotico è quello se avessimo solo la resistenza $\frac{V_0}{R} = I$

costruendo campo mag

③ Caso con corrente alternata: $V(t) = V_0 \cos\omega t$

eq diff → $V_0 \cos\omega t = IR + L\frac{dI}{dt}$

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$Re\left(V_0 e^{i\omega t}\right) = Re\left(IR + L\frac{dI}{dt}\right)$$

$\underbrace{V_0 e^{i\omega t} = IR + L\frac{dI}{dt}}$

eq differ non omogenea: t non appare nella dipendenza $I = I(t)$, ma è anche in

La soluz è una somma della soluz particolare (I_p) (non contiene le cost di integrazione) + soluz generale (I_0) dell'eq omogenea associata

$\hookrightarrow IR + L\frac{dI}{dt} = 0$

$$I_0 R + L\frac{dI_0}{dt} = 0 \qquad I_p R + L\frac{dI_p}{dt} = V_0 e^{i\omega t}$$

$I_s \overset{def}{=} I_0 + I_p$ è soluzione dell'eq generale e contiene le cost di integraz (dentro I_0)

sommo membro a membro $\Rightarrow$

$$\boxed{R I_s + L\frac{dI_s}{dt} = V_0 e^{i\omega t}}$$

SOLUZ dell'omogenea: $I_0 = J e^{-\frac{R}{L}t}$

J ← cost di integraz

SOLUZ generale: "metodo delle variaz delle costanti"

$I = J e^{-\frac{R}{L}t}$ → considero $J = J(t)$ la cost di integraz dell'omog come una fn di t

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dJ}{dt} e^{-\frac{R}{L}t} + J\left(-\frac{R}{L}\right) e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$R I + L\frac{dI}{dt} = V_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} I + \frac{V_0}{L} e^{i\omega t}$$

$$-\frac{R}{L} I + \frac{V_0}{L} e^{i\omega t} \longrightarrow -\frac{R}{L}\big(\underbrace{I - J e^{-\frac{R}{L}t}}_{=0}\big) + \frac{V_0}{L} e^{i\omega t} = \frac{dJ}{dt} e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{V_0}{L} e^{i\omega t + \frac{R}{L}t}$$

← derivando

$$J(t) = \frac{V_0}{R + i\omega L} e^{\left(\frac{R}{L} + i\omega\right)t} + C$$

$$I(t) = J(t) e^{-\frac{R}{L}t} = \underbrace{\frac{V_0}{R + i\omega L} e^{i\omega t}}_{\text{soluz particolare } I_p} + \underbrace{C e^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{soluz dell'omogenea assoc}} = I(t)$$

SOLUZ

$$I(t) = C e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0}{R+i\omega L} e^{i\omega t} \underset{\substack{t \text{ grandi} \\ (\text{a regime})}}{\sim} \frac{V_0}{R+i\omega L} e^{i\omega t}$$

dopo un transiente che dura $t \gg \frac{L}{R}$

$$\mathrm{Re}(I(t)) = \mathrm{Re}\left(\frac{V_0}{R+i\omega L} e^{i\omega t}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{V_0 (R - i\omega L) e^{i\omega t}}{R^2 + \omega^2 L^2}\right) = \frac{V_0}{R^2+\omega^2 L^2} \mathrm{Re}\left(\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\, e^{i\omega t} e^{-i \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}}\right)$$

$$a+ib = \sqrt{a^2+b^2}\, e^{i \operatorname{arctg}\frac{b}{a}}$$

$$= \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \mathrm{Re}\, e^{i(\omega t \underbrace{- \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}}_{\varphi})} = \frac{V_0 \cos(\omega t + \varphi)}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}$$

a regime nel circuito RL la corrente oscilla con la stessa frequenza ω di V, ma una fase $\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}$

$$\frac{V_0 \cos(\omega t + \varphi)}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} = I(t)$$

confrontiamo con legge di Ohm $V = I R'$

$\sqrt{R^2+\omega^2L^2}$ si comporta come una specie di resistenza (per analogia con legge di Ohm)

def $\boxed{\text{IMPEDENZA}}$ del circuito $\rightarrow$ la resist efficace di un circuito con bobine

POTENZA MEDIA DISSIPATA dal circuito RL
(corrente alternata)

potenza di un circuito $\frac{dW}{dt} = VI$ ← potenza istantanea

$$\underbrace{V_0 \cos\omega t}_{V} \quad \underbrace{I_0 \cos(\omega t + \varphi)}_{I}$$

$$I_0 \stackrel{def}{=} \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}$$

potenza media $\langle VI \rangle = \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T dt \; V(t)\, I(t)}_{\text{media su un periodo di oscillaz}} =$

media su un periodo di oscillaz $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$

$$= \frac{V_0 I_0}{T}\int_0^T dt \cos\omega t \cos(\omega t+\varphi)$$

$$\cos(\omega t+\varphi) = \cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t \sin\varphi$$

$$= \frac{V_0 I_0}{T}\underbrace{\int_0^T dt \cos^2\omega t}_{\frac{1}{2}} \cos\varphi - \underbrace{\cancel{\cos\omega t \sin\omega t \sin\varphi}}_{=0}$$

$$= \frac{V_0 I_0}{2}\cos\varphi$$ ← potenza media $V_0 I_0 \frac{\cos\varphi}{2}$

il generatore e la bobina si scambiano energia senza dissipaz

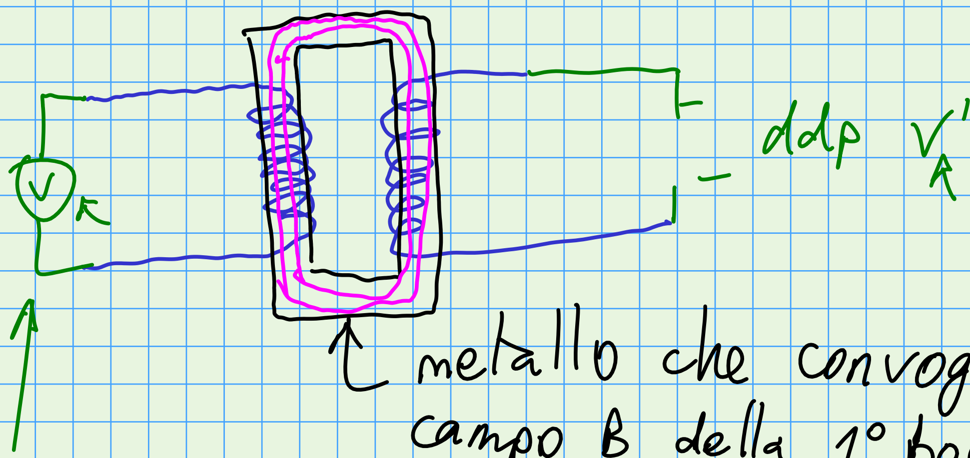
Potenza dissipata è zero se $\varphi = \frac{\pi}{2} = -\arctan\frac{\omega L}{R}$

$$\cos\varphi = \cos\arctan\frac{\omega L}{R} = \frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$$

$\varphi = \arctan\frac{y}{x}$

$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

TRASFORMATORE



metallo che convoglia il flusso di campo B della 1° bobina nella seconda

corrente alternata ⇒ il campo mag della 1° bobina è oscillante ⇒ la 2° bobina vede un flusso di campo mag variabile ⇒ ddp ai capi della bobina 2

induz di Faraday

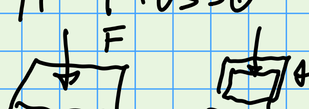
la ddp ai capi della bobina 2 $V' \neq V$

$V = V_0 \cos \omega t \xrightarrow{\text{induz}} V' = V_0' \cos \omega t$

ddp 1° bobina — ddp 2° bobina

$\frac{V_0}{V_0'}$ dipende dalla mutua induzione tra le bobine $M_{12} = M_{21}$

in condiz ideali TUTTO il flusso della 1° bobina passa nella 2° ⇒ il rapporto tra $\frac{V_0}{V_0'}$ dipenderà dal n. di spire → il flusso va moltiplicato per N



← 2 spire $F+F$ N spire → NF

$$\frac{V_0}{N_0} = F_q = \frac{V_0'}{N_0'}$$

F_q: flusso attraverso CIASCUNA SPIRA

N_0: n. di spire nella 1° bobina

$$V_0 = \frac{N_0}{N_0'} V_0'$$

$\frac{N_0}{N_0'}$: rapporto tra n di spire $\rightarrow$ determina la ddp V_0'

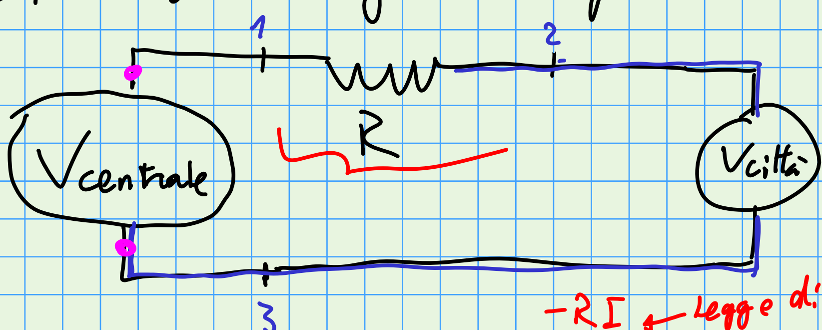
sto aumentando l'en se aumento V ?

NO $\longrightarrow$ potenza $\frac{dW}{dt} = VI$

se aumento V e diminuisco I $\Rightarrow$ l'energia è cost

Linee ad alta tensione:

per trasportare en elettria $\longrightarrow$ minimizzare la dissipaz di energia lungo i cavi elettrici



$$V_1 - V_2 = RI$$

$$V_{città} = V_2 - V_3 = \underbrace{(V_2 - V_1)}_{-RI \text{ (Legge di Ohm)}} + \underbrace{(V_1 - V_3)}_{V_{centrale}} = V_{centrale} - RI$$

≈ 0

caduta di tensione dovuta alla resistenza dei fili

moltiplico per I

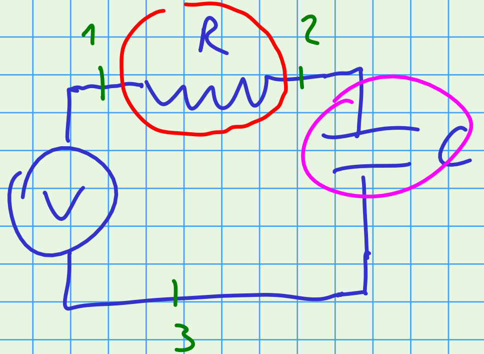
$$\underbrace{V_{città} I}_{\text{potenza usata in città}} = \underbrace{V_{centrale} I}_{\text{potenza generata centrale}} - \underbrace{RI^2}_{\text{effetto Joule: potenza dissipata}}$$

RAPPORTO TRA POTENZA GENERATA e POTENZA USATA

$$\frac{V_{centrale}\, I}{V_{città}\, I} = \frac{V_{centrale}\, I}{V_{centrale}\, I - R I^2} \xrightarrow[V_{centrale} \to \infty]{} 1$$

vogliamo aumentare la tensione il più possibile

CIRCUITO RC : resistenza e condensatori in serie



RI ← legge di Ohm

$$V = V_1 - V_3 = (V_1 - V_2) + \underbrace{(V_2 - V_3)}_{= \frac{Q}{C}}$$

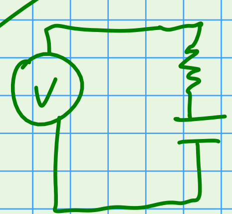
Q carica sulle piastre

C capacità

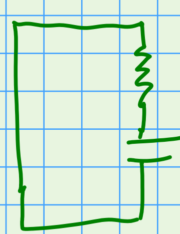
$I = \frac{dQ}{dt}$ ← carica che attraversa un punto nell'unità di tempo

$$V(t) = RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = \boxed{R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = V}$$

① caso $t<0$ V cost $t \geq 0$ $V=0$



$t<0$



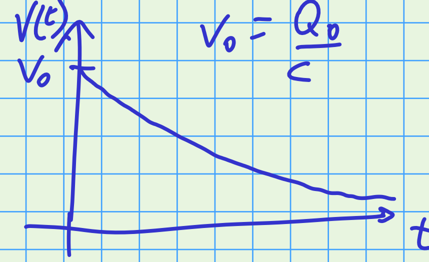
$t \geq 0$

$V=0$

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{\cancel{R}}{RC} Q \Rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\cancel{R}}{C R} t}$$

$$Q_0 = Q(t=0)$$

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_0}{C} e^{-\frac{\cancel{R}}{C\,R} t}$$

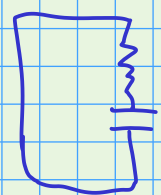


$V_0 = \frac{Q_0}{C}$

l'energia che inizialmente era immagazzinata nel campo el del condens viene dissipata sulla resist

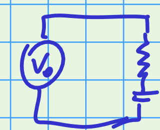
② caso $V = 0 \quad t < 0 \qquad V = V_0 \quad t \geq 0$

$t < 0$



a regime $\longrightarrow$

$t \geq 0$



$$\bar{Q} \stackrel{def}{=} Q - \underbrace{C V_0}_{cost} \qquad V_0 = R \frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C}$$

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC} \bar{Q} \Rightarrow \bar{Q}(t) = \bar{Q}_0 e^{-t/RC}$$

$$Q(t) - CV_0 = (Q_0 - CV_0) e^{-t/RC}$$