FISICA 2 10/12/20

EQUAZ di MAXW in relatività

① $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \;\rightarrow\; \underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}} = \mu_0 c^2 \rho$

④ $\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial F^{00}}{\partial x^0}}_{=0} + \frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3} = \mu_0 \underbrace{c\rho}_{j^0}}$$

1° eq Max

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ & & 0 & B_x \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

($\frac{E_x}{c} = F^{01}$, $\frac{E_y}{c} = F^{02}$)

$$(\vec{\nabla}\times\vec{B})_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \mu_0 j_x$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \mu_0 j_x$$

$B_z = F^{12}$, $-B_y = F^{13}$, $-\frac{E_x}{c} = F^{10}$, $x^0 = ct$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\frac{\partial F^{11}}{\partial x^1}}_{=0} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{10}}{\partial x^0} = \mu_0 j^1}$$

$$\boxed{\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 j^\mu}$$

$$\boxed{\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu}$$

$\mu = 0$
$\mu = 1$
$\mu = 2 \rightarrow$ comp y della 4° eq M
$\mu = 3 \rightarrow$ " z " " "

↳ in termini dei potenziali $F^{\mu\nu} \stackrel{def}{=} \nabla^\mu A^\nu - \nabla^\nu A^\mu$

$$\nabla_\nu(\nabla^\mu A^\nu - \nabla^\nu A^\mu) = \mu_0 j^\mu$$

($\nabla_\nu \nabla^\mu A^\nu = 0$)

nel gauge di Lorentz $\nabla_\nu A^\nu = 0$

$$-\nabla_\nu \nabla^\nu A^\mu = \mu_0 j^\mu \iff \Box A^\mu = -\mu_0 j^\mu$$

(avevamo già ottenuto)

2^o e 3^e eq Maxw → quelle automaticam soddisfatte se scritte in termini dei pot:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \boxed{\frac{\partial F^{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F^{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x_3} = 0}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \leftarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{E_z}{c} & B_y & & B_x \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

F^{23} F^{31}

$$\nabla^\lambda F^{\mu\nu} + \nabla^\mu F^{\nu\lambda} + \nabla^\nu F^{\lambda\mu} = 0$$

$\lambda = 1,\ \mu = 2\ \nu = 3$

$\lambda = 2, \mu = 3, \nu = 0$ $\quad ct = -x_0$

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_x = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

$$\boxed{\cancel{c}\frac{\partial F^{30}}{\partial x_2} + \cancel{c}\frac{\partial F^{02}}{\partial x_3} + \cancel{c}\frac{\partial F^{23}}{\partial x_0} = 0}$$

$$\boxed{\nabla^\lambda F^{\mu\nu} + \nabla^\mu F^{\nu\lambda} + \nabla^\nu F^{\lambda\mu} = 0} \quad (*)$$

$\lambda\mu\nu = $ 123, 230, 301, 012 } permutaz ciclica degli indici

$\forall \lambda,\mu\nu \rightarrow 64 = 4^3$ equazioni

vengono tutte da una identità di Jacobi per i potenziali:

$$\nabla^\lambda\underbrace{\left(\nabla^\mu A^\nu - \nabla^\nu A^\mu\right)}_{F^{\mu\nu}} + \nabla^\mu\underbrace{\left(\nabla^\nu A^\lambda - \nabla^\lambda A^\nu\right)}_{F^{\nu\lambda}} +$$

$$+ \nabla^\nu\underbrace{\left(\nabla^\lambda A^\mu - \nabla^\mu A^\lambda\right)}_{F^{\lambda\mu}} = 0$$

si può compattare introducendo il tensore Levi Civita

$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = 1$ se $\alpha=0, \beta=1, \gamma=2, \delta=3$ e permutaz pari

$= -1$ se permutaz dispari

$= 0$ altrimenti

numero di inversioni $=$ n di coppie t.c. $x < y$ ma $p(x) > p(y)$

$$\varepsilon^{0132} = -1$$

$$\varepsilon^{1230} = 1$$

$$\boxed{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla^\alpha F^{\beta\gamma} = 0 \qquad \delta = 0,1,2,3}$$

$\delta = 3$

α	β	γ	
0	1	2	pari
1	2	0	pari
2	0	1	pari
0	2	1	dispari
1	0	2	dispari
2	1	0	dispari

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta_0} \nabla^\alpha F^{\beta\gamma} = \underbrace{\nabla^0 F^{12}}_{\text{pari}} + \nabla^1 F^{20} + \nabla^2 F^{01}$$

$$- \nabla^0 F^{21} - \nabla^1 \underset{\substack{\shortparallel \\ -F^{20}}}{F^{02}} - \nabla^2 \overset{\substack{-F^{01} \\ \shortparallel}}{F^{10}} = 2\left(\nabla^0 F^{12} + \nabla^1 F^{20} + \nabla^2 F^{01}\right) \underset{\substack{\shortparallel\\0}}{}$$

$F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$

Analogo $\delta = 1,2,3$

Forza di Lorentz relativistica $\rightarrow$ def F dei campi $\vec{E}, \vec{B}$

$$\frac{dt}{\gamma} = d\tau$$

non relativ $\rightarrow$ $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$

Forza di Minkowski $\overset{def}{=} K^\mu = \dfrac{dp^\mu}{d\tau}$ $\leftarrow$ tempo proprio

$$\gamma \frac{d\vec{p}}{dt} = q\left(\gamma \vec{E} + \gamma\vec{v}\times\vec{B}\right) \leftarrow \gamma \text{ ambo i m}$$

$$\gamma = -\frac{\eta_0}{c}$$

4 vett velocità

$$\eta^\mu \stackrel{def}{=} (\gamma c, \gamma\vec{v}) = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$\Downarrow$$

$$\eta_\mu = (-\gamma c, \underbrace{\gamma\vec{v}}_{\vec{\eta}})$$

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = q\left(-\eta_0 \frac{\vec{E}}{c} + \vec{\eta}\times\vec{B}\right)$$

$$\frac{dp_x}{d\tau} = q\Big(-\eta_0 \frac{E_x}{c} + \overbrace{\eta_y \underset{-F^{21}}{B_z} - \eta_z \underset{F^{31}}{B_y}}^{(\vec{\eta}\times\vec{B})_x}\Big) =$$

$$= q\left(-\eta_0 F^{01} \cancel{+}- \eta_2 F^{21} \cancel{+}- \eta_3 F^{31} \cancel{+}- \eta_1 \overset{0}{F^{11}}\right)$$

$$= -q\,\eta_\mu F^{\mu 1} = \boxed{q F^{1\mu}\eta_\mu = \frac{dp^1}{d\tau}}$$

$$F^{\mu 1} = -F^{1\mu}$$

$$K^\nu = \boxed{\frac{dp^\nu}{d\tau} = q F^{\nu\mu}\eta_\mu}$$

$$\nu = 1, 2, 3$$

y z

$\nu = 0$ $\quad p^0 = \frac{W}{c} \leftarrow$ energia

$$F^{01} = \frac{E_x}{c} \quad F^{02} = \frac{E_y}{c} \quad F^{00} = 0$$

$$\Downarrow$$

Componente $\nu = 0$

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{1}{c}\frac{dW}{d\tau} = qF^{0\mu}\eta_\mu = q\frac{\vec{E}}{c}\cdot\vec{\eta} = q\gamma\frac{\vec{E}}{c}\cdot\vec{v}$$

$\gamma \sim 1$

$v \ll c$

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = q\vec{E}\cdot\vec{v}} \leftarrow$$

potenza (variaz di en) di una particella q che si muove a vel $\vec{v}$ in un campo elm

EL RELATIVISTICA: riassunto

campi def con Forza di Lorentz

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = q F^{\alpha\mu} \eta_\mu$$

eq Maxw
$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu \\ &\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla^\alpha F^{\mu\nu} = 0 \end{aligned}}$$
← più eleganti in notaz relativ

in termini dei potenziali $F^{\mu\nu} = \nabla^\mu A^\nu - \nabla^\nu A^\mu$

eq Maxw $\Box A^\mu = -\mu_0 j^\mu$ nel gauge Lorentz $\nabla^\nu A_\nu = 0$

CIRCUITI ELETTRICI

LEGGE di OHM GENERALIZZATA → tiene conto dell'induz di Faraday

legge Faraday $V_i = -\frac{\partial F}{\partial t}$ F = Flusso campo magn

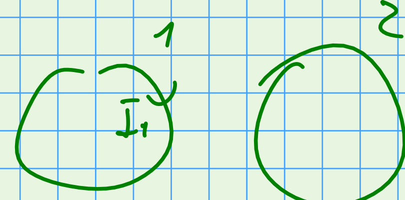
↑ fem indotta → ddp $F = \int_S d^2r\, \vec{n} \cdot \vec{B}$

Legge di Ohm → $V = I R$

" " generalizzata $V_{TOT} = IR + V_i =$

$= IR - \frac{\partial F}{\partial t}$

coeffic di mutua induz



$$F_2 = M_{21} I_1$$

↑ flusso attraverso spira 2 per effetto di corrente che passa in spira 1

$$M_{21} = M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$ ← fattore geom

⇒ fem nella spira 2 $\quad \mathcal{E}_2 = -\frac{dF_2}{dt} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt}$

legge faraday

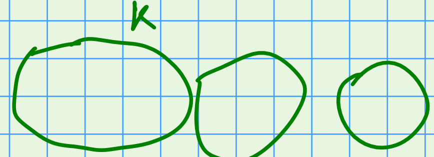
geometria fissa

sostituisco in legge di Ohm:

nel circuito k

sommo su tutti i circuiti

$$I_k R_k = V_k - \frac{\partial F_k}{\partial t} = V_k - \sum_i M_{ki}\frac{\partial I_i}{\partial t}$$



$$\boxed{V_k = I_k R_k + \sum_i M_{ik}\frac{\partial I_i}{\partial t}}$$

in funzione di I_i è una eq differenziale

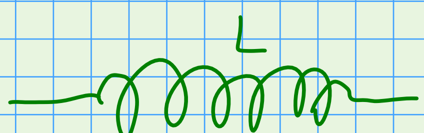
spesso $M_{ik} = 0$ tranne nel caso $k = i$ $\quad M_{kk} = L_k$

induttanza

o coefficiente di autoinduz → variaz di flusso nella spira stessa quando cambia la corrente

è significativa nel solenoide, bobina, induttanza

← elemento circuitale



← simbolo circuitale

UdM → Henry = $\frac{Vs}{\text{Ampere}}$

Energia magnetica in un circuito $\quad W = \frac{1}{2} L I^2$

se ho molti circuiti:

$$\underline{W = \frac{1}{2} \sum_{ik} I_i I_k M_{ik}}$$

ddp del circuito k

corrente " "

Potenza di un circuito $\frac{dW}{dt} = V I = \sum_k V_k I_k$

$V_k = \sum_i M_{ik} \frac{\partial I_i}{\partial t}$ induz Faraday

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{ik} M_{ik} I_k \frac{\partial I_i}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{ik} \Big(\underset{M_{ki}}{M_{ik}} I_k \frac{\partial I_i}{\partial t} + M_{ik} I_k \frac{\partial I_i}{\partial t} \Big)$$

scambiato indici prima somme

$$= \frac{1}{2} \sum_{ik} \Big(M_{ik} I_i \frac{\partial I_k}{\partial t} + M_{ik} I_k \frac{\partial I_i}{\partial t} \Big) =$$

deriv del prod

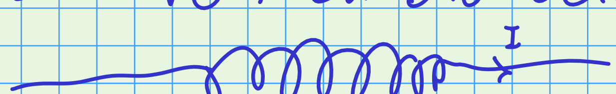
$$= \frac{1}{2} \sum_{ik} M_{ik} \frac{\partial}{\partial t} \left(I_i I_k \right)$$

$$\Rightarrow W = \int_0^{t_{fin}} dt \, \frac{dW}{dt} = \int_0^{t_{fin}} dt \, \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \sum_{ik} M_{ik} I_i I_k$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \sum_{ik} M_{ik} I_i I_k} = \frac{1}{2} L I^2$$

se SOLO un termine è diverso da zero $\quad M_{ik} = L$

ESERCIZIO: calcolo dell'induttanza di una bobina:



n spire per unità di lunghezza

induttanza L ?

campo dentro $B = \mu_0 n I$ $\qquad B_{fuori} = 0$

energia del campo mag $\qquad W_m = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \, \frac{B^2}{\mu_0} =$

raggio

$= \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} R^2 \pi l \overset{\text{volume}}{=} \frac{\mu_0 n^2 R^2 \pi l}{2} I^2$

Lunghezza spira

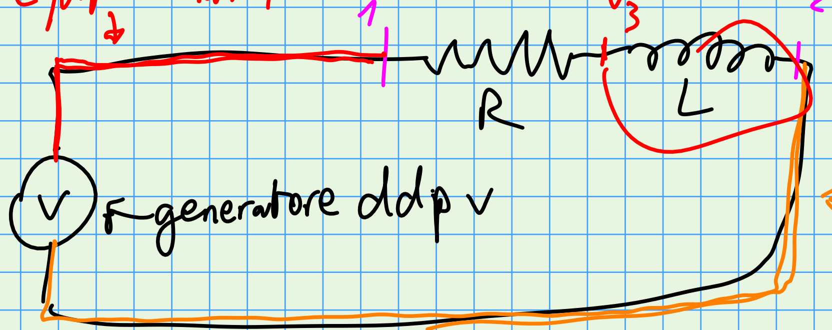
campo uniforme dentro e 0 fuori

Sappiamo anche $W = \frac{1}{2} L I^2$

$L = \mu_0 n^2 R^2 \pi l$

Circuito con Resistenza e induttanza in serie

circuito RL



Legge di Ohm generalizzata

ddp del generat

ddp tra 1 e 2 $\qquad V_1 - V_2 = V \quad \Rightarrow \quad V = V_1 - V_3 + V_3 - V_2 = RI + L\frac{dI}{dt}$

$V_1 - V_3 = RI$ ← Legge di Ohm (tra 1 e 3 c'è resist)

$V_3 - V_2 = L\frac{dI}{dt}$ ← Legge di Ohm generalizz (tra 3 e 2 c'è una bobina)

$$\boxed{V = RI + L\frac{dI}{dt}}$$ ← eq differ con incognita $I(t)$