FISICA 2 9/12/20

invarianza dell'el vol spaziot:

$$d^4x \overset{def}{=} dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3 = dx^0\, d^3r \leftarrow \text{è invariante}$$

$\leftarrow dx\,dy\,dz = d^3r$

$$d^4x' = \det |J|\, dx^4 = \det(\Lambda^\mu{}_\nu)\, d^4x = d^4x$$

trasf coord $x', t' \to x\, t$
$\to$ T Lorentz Λ

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\det \Lambda = \gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = 1$$

$\gamma^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$

$\beta = \frac{v}{c}$

EQ di CAMPO ELM $\to$ eq Maxw

L'eldinamia è già teoria relativistica $\to$ le eq sono covarianti

def eq covariante $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ è <u>invariante in forma</u>

cioè per relatività $\to$ è scritta nello stesso modo in tutti i riferimento

$\to$ in termini 4vett e tensori

cambio di sist $\Rightarrow$ cambio dei valori numerici delle componenti dei 4vettori

def QUADRICORRENTE $\quad j^\mu \overset{def}{=} (c\rho, \vec{j})$

ρ: dens carica

$\vec{j}$: dens corrente

j^μ è 4vettore $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $j'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, j^\nu$

dato sperim $\to$ carica el q è ~~invariante~~ scalare relativistico nel proprio riferimento (→ solidale) densità di carica

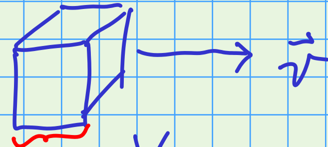
$$\rho_p \stackrel{def}{=} \frac{Q}{V_p}$$

← carica

← volume

← volume proprio

in altro sist in moto a vel $\vec{v}$



$$V = \frac{V_p}{\gamma}$$ ← contrazione della lungh longitudinale

$$\Rightarrow \rho = \frac{Q}{V} = \gamma \rho_p$$

densità di corrente $\vec{j} \stackrel{def}{=} \rho \vec{u} = \gamma \rho_p \vec{u} = \rho_p \gamma \vec{u} = \rho_p \vec{\eta}$

$\vec{u}$ ← velocità della carica

$\vec{\eta}$ ← parte spaz vel mink

$$\eta^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (c\gamma, \gamma \vec{u}) \qquad \vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

ρ_p ← scalare relat (prin relatività)

$$j^\mu = \rho_p \eta^\mu = (\underbrace{\rho_p \gamma}_{\rho} c, \underbrace{\underbrace{\rho_p \gamma}_{\rho} \vec{u}}_{\vec{j}}) = (\underbrace{c\rho}_{j^0}, \vec{j})$$

Prod di scalare × 4vett ⇒ j^μ è 4 vett

Eq continuità della carica $\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

in termini di j^μ:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial j^0 / c}{\partial x^0 / c} = \frac{\partial j^0}{\partial x^0} = -\frac{\partial j^0}{\partial x_0}$$

$$x^\mu = (\underbrace{ct}_{x^0}, \vec{r}) \qquad x_0 = (-ct, \vec{r})$$

$$\nabla \cdot \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = \frac{\partial j^1}{\partial x^1} + \frac{\partial j^2}{\partial x^2} + \frac{\partial j^3}{\partial x^3} = \frac{\partial j^1}{\partial x_1} + \frac{\partial j^2}{\partial x_2} + \dots$$

$$\frac{\partial j^1}{\partial x_1} + \frac{\partial j^2}{\partial x_2} + \frac{\partial j^3}{\partial x_3} - \frac{\partial j^0}{\partial x_0} = \nabla^\mu j_\mu = 0$$

$\boxed{\nabla^{\mu} j_{\mu} = 0}$ ← covariante $\quad \nabla'^{\mu} j'_{\mu} = 0$

→ EQ MAXW per i POTENZIALI:

in gauge Lorentz $\left(\leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \right)$

$$\boxed{\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}}$$

$$\square V = -\frac{\rho c}{\varepsilon_0 c}$$

← compon del 4vett j^{μ}

$= -\frac{j^0}{c\varepsilon_0} = -\mu_0 c j^0$

$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$

$$\boxed{\square \frac{V}{c} = -\mu_0 j^0}$$

scalare relativistico $\quad \square = \nabla^{\mu} \nabla_{\mu}$ = prodotto scal ⇒ è scalare rel

⇒ 4 vett potenziale $A^{\mu} \stackrel{def}{=} \left(\frac{V}{c}, \vec{A} \right)$

⇒ eq Maxw in gauge Lorentz $\quad \boxed{\square A^{\mu} = -\mu_0 j^{\mu}}$

sono 4 eq $\mu = 0, 1, 2, 3$
(no indici ripetuti)

⇒ A^{μ} è un 4 vett ⇐ A^{μ} moltiplicato per uno scalare $\square$ da' un 4-vett j^{μ}

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} + \frac{\partial (-A_0)}{\partial (-x_0)} = \sum_{\mu} \boxed{\nabla^{\mu} A_{\mu} = 0}$$

$A_0 = \frac{V}{c}$, $\quad x_0 = -ct$

il gauge di Lorentz è invariante per T Lorentz:
è prod scalare ⇒ scalare relat

CAMPO EL e CAMPO MAG

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \quad E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t}$$

in termini di A^μ

$$E_x = -c\frac{\partial A^0}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial \underbrace{(-x_0/c)}_{t}} = c\left(-\frac{\partial A^0}{\partial x_1} + \frac{\partial A^1}{\partial x_0}\right)$$

$$E_y = c\left(-\frac{\partial A^0}{\partial x_2} + \frac{\partial A^2}{\partial x_0}\right)$$

$$E_z = c\left(-\frac{\partial A^0}{\partial x_3} + \frac{\partial A^3}{\partial x_0}\right)$$

$$B_x = (\vec{\nabla}\times\vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A^3}{\partial x_2} - \frac{\partial A^2}{\partial x_3} = F^{23}$$

$$B_y = \frac{\partial A^1}{\partial x_3} - \frac{\partial A^{\cancel{x}\,3}}{\partial x_1} \qquad B_z = \frac{\partial A^2}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_2}$$

$$F^{\mu\nu} \stackrel{def}{=} \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = \nabla^\mu A^\nu - \nabla^\nu A^\mu$$

indici controvarianti

def TENSORE CAMPO ELM $\rightarrow$ contiene $\vec{E}$ e $\vec{B}$ come compon

è TENSORE RELATIVISTICO $\stackrel{def}{\Longleftrightarrow}$ $T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\gamma \Lambda^\nu{}_\kappa T^{\gamma\kappa}$

$F^{\mu\nu}$ è tensore rel perché ciascuno dei due indici si rif ad un 4 vett

$$F'^{\mu\nu} = \underbrace{\Lambda^\mu{}_\gamma \nabla^\gamma}_{\nabla'^\mu} \underbrace{\Lambda^\nu{}_\kappa A^\kappa}_{A'^\nu} - \underbrace{\Lambda^\mu{}_\iota A^\iota}_{A'^\mu} \underbrace{\Lambda^\nu{}_\vartheta \nabla^\vartheta}_{\nabla'^\nu}$$

cambio indici somma $\iota = \gamma$, $\vartheta = \kappa$ $\stackrel{\downarrow}{=}$

$$= \Lambda^{\mu}{}_{\gamma} \Lambda^{\nu}{}_{\kappa} \underbrace{(\nabla^{\gamma} A^{\kappa} - \nabla^{\kappa} A^{\gamma})} = \Lambda^{\mu}{}_{\gamma} \Lambda^{\nu}{}_{\kappa} F^{\gamma\kappa}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

F^{00}, F^{01}, F^{10}, $-B_y = F^{23}$, F^{32}

campo el è la parte "temporale" di $F^{\mu\nu}$

campo mag è la comp spaziale di $F^{\mu\nu}$ → è scritto come un vettore assiale (pseudovett)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{A} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 & a_z & -a_y \\ -a_z & 0 & -a_x \\ a_y & -a_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

campo el e campo mag sono due componenti del tensore di campo elm

⇒ se passo da un rif all'altro ⇒ un campo el acquista un campo mag

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c \;\; E_y/c \;\; E_z/c \\ -E \\ \vdots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} & \vec{E} \\ & \vec{B} \neq 0 \end{pmatrix}$$

TRASF di Lorentz per $F^{\mu\nu}$:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\gamma} \Lambda^{\nu}{}_{\kappa} F^{\gamma\kappa} = \left(\vec{\Lambda} \cdot \vec{F} \cdot \vec{\Lambda}\right)^{\mu\nu}$$

$$F' = \vec{\Lambda} \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta\gamma \frac{E_x}{c} & \gamma\frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\gamma\frac{E_x}{c} & -\beta\gamma\frac{E_x}{c} & B_z & -B_y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{-\beta\gamma^2 \frac{E_x}{c} + \beta\gamma^2 \frac{E_x}{c}}_{=0} & \underbrace{\gamma^2 \frac{E_x}{c} - \beta^2\gamma^2 \frac{E_x}{c}}_{\frac{E_x}{c}} & -\beta\gamma\frac{E_y}{c} + \gamma B_z & \gamma\frac{E_z}{c} + \dots \\ & \dots & - & \end{pmatrix}$$

$\frac{E_x}{c} = F'^{01} = \frac{E'_x}{c}$ $\qquad F'^{02} = \frac{E'_y}{c}$

$\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$

$-\beta\gamma B_y$

$\Rightarrow \quad E'_x = E_x \qquad B'_x = B_x$

$\frac{E'_y}{c} = \gamma\left(\cancel{B_z - \beta\frac{E_y}{c}}\right) = \gamma\left(\frac{E_y}{c} - \beta B_z\right) \qquad B'_y = \gamma\left(B_y \overset{?}{+} \beta\frac{E_z}{c}\right)$

$\frac{E'_z}{c} = \gamma\left(\cancel{B_y - \beta\frac{E_z}{c}}\right) = \gamma\left(\frac{E_z}{c} - \beta B_y\right) \qquad B'_z = \gamma\left(B_z \overset{?}{+} \beta\frac{E_y}{c}\right)$

$\vec{v} = v_x \Rightarrow$ TL parallele asse x

$\frac{E'_y}{c} = \gamma\left(\frac{E_y}{c} - v_x B_z\right) = \gamma\left(\frac{\vec{E}}{c} - \vec{v}\times\vec{B}\right)_y$

$\frac{E'_z}{c} = \gamma\left(\frac{E_z}{c} - v_x B_y\right) = \gamma\left(\frac{\vec{E}}{c} - \vec{v}\times\vec{B}\right)_z$

$E'^{\parallel}_x = E^{\parallel}_x \Rightarrow$ comp longit di $\vec{E}$ sono invariate

$E'^{\perp} = \gamma\left(E^{\perp} - (\vec{v}\times\vec{B})^{\perp}\right) \Rightarrow$ comp $\perp$ al moto

$B'_x = B_x \quad , \quad B'_y = \gamma\left(\vec{B} - \frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}\right)_y$

$B'_z = \gamma\left(B - \frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}\right)_z$

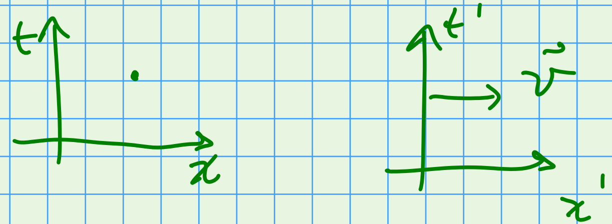
Trasf dei campi per T Lorentz

FORZA di LORENTZ (caso non relativist)

↳ forza di Lorentz per magnetost è determinata dalla forza di Lorentz per elettrostatica

elettrost → carica ferma

$\vec{F} = q\vec{E}$ ← def di campo elettrico



sist primato in moto a vel $\vec{v}$

la carica si muove a vel $-\vec{v}$

$\vec{F} = q\vec{E}$ scritta in termini del campo $\vec{E}'$ nel sist primato

appare un campo mag

$$\vec{F}' = q\vec{E}' = q\gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \sim q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

↑ invariante ↑ $v \ll c$ $\gamma \sim 1$

forza di Lorentz definisce campo mag

⇒ se vogliamo teoria covariante ⇒ ad un campo el dobbiamo associare un campo mag