FISICA 2 4/12/20

rel gen → tutti i sistemi di rif sono equivalenti
→ forze apparenti in sistemi accelerati
↳ dovute all'acceleraz

massa inerziale = massa gravitazionale ⇒ la gravità è forza apparente in un rif accelerato

MECCANICA RELATIVISTICA

- Tempo proprio (proper time) $d\tau \overset{def}{=} \frac{dt}{\gamma}$

↳ il tempo segnato da un orologio solidale con il sist di riferimento $\Delta t_T(T) \overset{\text{prin relat}}{=} \Delta t_S(S)$

osserv su treno
orologio sul treno

$d\tau$ è uno scalare relativist

↳ $d\tau \overset{def}{=} \frac{dt}{\gamma} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt = \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2}}$

$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$

$= \frac{1}{c}\sqrt{-(dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2)} = \frac{1}{c}\sqrt{-dx_\mu dx^\mu}$

$dx^\mu = (c\,dt, dx, dy, dz)$

il prod scal è uno scalare di Lorentz ⇒ $d\tau$ è scalare.

- la velocità propria $\eta^\mu \overset{def}{=} \frac{dx^\mu}{d\tau} \overset{def}{=} (c\gamma, \gamma\vec{u})$

$\eta^0 = \frac{d\,ct}{d\tau} = \gamma c$

$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ← la velocità ordinaria NON è 4-vettore

• 4-vett energia - momento $p^\mu \stackrel{def}{=} m \eta^\mu$

parte spaziale $\vec{p} = \gamma m \vec{u} \underset{\substack{\gamma \sim 1 \\ v \ll c}}{\simeq} m\vec{u}$ ← momento Newtoniano

Parte temporale : $p^0 = mc\gamma$ ∝ all'energia : $\frac{E}{c} = mc\gamma$

perché nel lim non relativ → en cinetica

$$mc^2\gamma = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \underset{v \ll c}{\simeq} mc^2\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right) =$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} \overset{ss}{\simeq} 1 - \frac{1}{2}x$$

$$= mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 = E$$

En cinetica

energia è sempre def a meno di una costante
→ fisicamente sono importanti solo le differenze di energia

$E = mc^2$ ← energia a riposo della particella
$\uparrow_{v=0}$
↓
equivalenza della massa e dell'energia

$$p^\mu = \left(\overset{\overset{p^0}{\shortparallel}}{\frac{E}{c}}, \gamma m \vec{u}\right)$$

$E = \gamma mc^2$ ← energia cinetica relativistica $\underset{v \to c}{\longrightarrow} \infty$

$\gamma \to \infty$ se $v \to c$

⇒ è impossibile accelerare un oggetto massivo a vel $v = c$

postulato della meccanica (estensione della conservaz dell'energia e conservaz momento, conservaz massa)

↳ diventano $\boxed{\text{UN}}$ postulato: $\boxed{\text{la conservazione energia-momento}}$

non si può parlare separatam di cons en e momento

sono due componenti del 4-vett en-momento

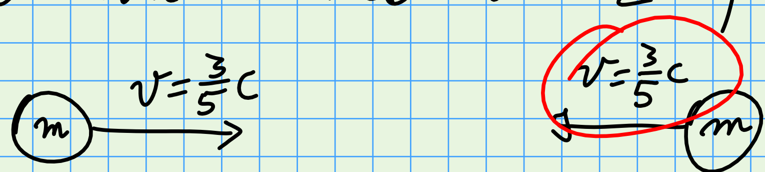
le componenti non si conservano → TL

in ∀ processo la somma di tutti i 4-vett momento-energia è conservata in ∀ rif (cost nel tempo di quel riferimento)

se ho N partic $\quad P^\mu_{TOT} \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{N} p^\mu_{(i)}$

Esercizio delle palle di creta

urto anelastico di 2 palle di creta



urto anelastico ⇒ per simmetria si fermano: quale è la massa finale?

calore dovuto all'urto anelastico è una forma di en ⇒ ha una massa!

Tempo iniz (prima dell'urto):

en di ciascuna è $\quad E^1_{iniz} = c\,p^0 = \gamma m c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} =$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{\frac{16}{25}}} = \frac{5}{4} m c^2$$

$\vec{u}_1 = -\vec{u}_2$

$$P^{\mu}_{\substack{TOT \\ iniziale}} = \left(\underbrace{\frac{5}{2} m c^{\cancel{2}}}_{= E/c}, \ \frac{5}{4}\left(\overbrace{m\,\vec{u}_1 + m\,\vec{u}_2}^{=0} \right) \right) = \left(\frac{5}{2} m c^2, \vec{0}\right)$$

Dopo l'urto, l'en cinetica è 0 → la palla risultante è ferma ⇒ $E_{fin} = M_{finale} c^2 = \frac{5}{2} m c^2$

conservaz del mom-en

$\Rightarrow \quad M_{fin} \neq 2m$

$M_{fin} = \frac{5}{2} m = 2m +$ en del calore

en termica = massa

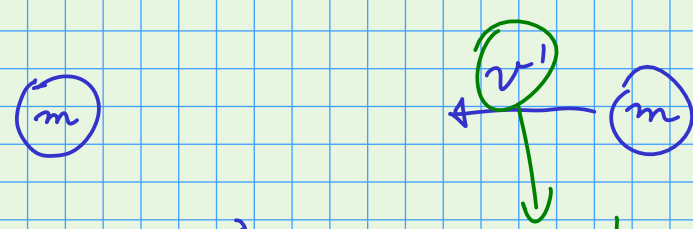
$$P^{\mu}_{\substack{TOT \\ fin}} = \left(\underbrace{\frac{5}{2} m^2 c^{\cancel{2}}}_{= E/c}, \ \vec{0} \right)$$

la palla è ferma

sistema di rif centro di massa

sistema di rif solidale con la massa sinistra

iniz:



finale

v' ← dal teorema di addiz velocità

$$v' = \frac{-v - v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} =$$

← vel nel rif c.m.

← vel del rif c.m.

addiz vel

$$= -\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}} = -\frac{2 \cdot \frac{3}{5} c}{1 + \frac{9}{25}}$$

$$E_{iniziale} = \underbrace{mc^2}_{\text{en part sinistra: ferma}} + \gamma' mc^2 \qquad \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}$$

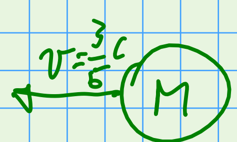
$$\vec{P}_{iniz} = \underset{\uparrow \text{ mom part sinistra}}{\vec{0}} + \gamma' m \vec{u}' = -\gamma' m \frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$$

$$P'^{\mu}_{TOT\ iniz} = \left(\cancel{mc}\,(1+\gamma')\ ,\ -\gamma' \frac{m 2 \vec{v}}{1+\frac{v^2}{c^2}} \right)$$

"$\cancel{E/c}$

en e mom sono diversi da quelli calcolati nell'altro sist e si conservano anche in questo sist

↳ fare il conto dell'en e momento



ALTRA FORMA per energia: energia in termini del momento (invece che della vel)

$$E = \gamma mc^2 = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

$$\boxed{P_\mu P^\mu = -\frac{E^2}{c^2} + \vec{P}\cdot\vec{P}}$$

$$P^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{P}\right)$$

"$\gamma m \vec{u} = m\vec{\eta}$

↑ parte spaziale della vel di Minkowski

$$P^\mu = m\eta^\mu \Rightarrow P_\mu P^\mu = m^2 \eta_\mu \eta^\mu = m^2 \Big[\underbrace{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2}_{\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}} - c^2 \underbrace{\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2}_{"\gamma^2}$$

↑ $\eta^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$

$$= m^2 \gamma^2 \Big[\underbrace{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}_{v^2} - c^2 \Big] = \frac{m^2 (v^2 - c^2)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} =$$

$$\frac{dt}{\gamma} = d\tau$$

$$= \boxed{-m^2 c^2 = p^\mu p_\mu}$$ ← modulo 4-vett en momento = massa a riposo

$$\| $$

$$-\frac{E^2}{c^2} + \underset{\vec{p}\cdot\vec{p}}{p^2} = -m^2c^2 \Rightarrow E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$\vec{F} = m\vec{a}$

FORZE in relatività → 2° legge di Newton

(1° legge di Newton → definiz di sist rif inerziale)

2° legge Newton relativistica:

- Forza ordinaria $\quad F^\mu \overset{def}{=} \dfrac{dp^\mu}{dt}$ ← NON è un 4 vettore: derivata di 4-vett p^μ rispetto a una compon di 4-vett

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

utile se vogliamo la traiettoria in termini di t

- Forza di Minkowski $\quad K^\mu \overset{def}{=} \dfrac{dp^\mu}{d\tau}$ ← è un 4-vettore

$$K^0 = \frac{dp^0}{d\tau} = \frac{1}{c}\frac{dE}{d\tau}$$ ← potenza risp al tempo proprio diviso c

- ELETTRODINAMICA relativistica

Al contrario della meccanica (en cinetica), l'elettrodin

è già relativistica! le eq di Maxw sono eq relativ
(esempio → eq Maxw prevedono onde elm a vel c)

Tradurre la notazione in notazione 4-vettori
ma non cambieremo le formule

NOTAZIONE RELATIVISTICA

4-vett nabla, estensione relativ del vett $\vec{\nabla}$

∇^μ

$$\vec{\nabla} \overset{def}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\nabla^\mu \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \overset{def}{=} \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$$

indice controv (alto)

indice basso (covariante)

$x_0 = -ct$

dimostro che $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ ← indice basso è un 4 vettore CONTROVAR

$\Downarrow$

∇^μ ← indice alto

def di 4-vett controv a^μ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ è 4-vett

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}$$

← devo usare Λ per passare dal sist non primato al sist primato

↑ regola deriv delle funzioni composte: $x' = x'(x)$

↑ deriv risp x'_μ (sistema primato)

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial(\Lambda_\nu{}^\kappa x'_\kappa)}{\partial x'_\mu} = \Lambda_\nu{}^\kappa \frac{\partial x'_\kappa}{\partial x'_\mu} = \Lambda_\nu{}^\kappa \delta_\kappa^\mu$$

δ^κ_μ

$$x'_\nu = M^\gamma{}_\nu \, x_\gamma$$ ← TL di vett covarianti

$\Lambda^\mu{}_\nu$

$$\Rightarrow x_\gamma = (M^{-1})^\nu{}_\gamma \, x'_\nu = \Lambda^\nu{}_\gamma \, x'_\nu$$

$$x_\gamma = \Lambda^\nu{}_\gamma \, x'_\nu$$

$$x_\nu = \Lambda^\kappa{}_\nu \, x'_\kappa$$

$\hookrightarrow M\Lambda = \mathbb{1}$

$$\nabla^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad , \quad \nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

4-GRAD : $\nabla^\mu \alpha$ = 4-vettore

↑ scalare relativ

4-DIV : $\nabla^\mu v_\mu = \nabla_\mu v^\mu$ = scalare relativ

↑ prod scalare

4-rot → non esiste perché non c'è il prod vett in 4 dim → è sostituito da un prod tensoriale

Quadratello, Dalambertiano $\square \overset{def}{=} \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

$$= \nabla^\mu \nabla_\mu$$

dalambertiano modulo di ∇^μ