FISICA 2 3/12/20

TL per vett covarianti

sappiamo i vett controv (indice alto)

$$\begin{pmatrix} a^{0'} \\ a^{1'} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}}_{\Lambda} \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma a_0 - \beta\gamma a_1 \\ \gamma a_1 - \beta\gamma a_0 \end{pmatrix}$$

vett covarianti:

$$a'_\mu = \begin{pmatrix} -a^{0'} \\ a^{1'} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} -a^0 \\ a_1 \end{pmatrix} \overset{IMP}{=} \begin{pmatrix} -(\gamma a_0 - \beta\gamma a_1) \\ \gamma a_1 - \beta\gamma a_0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow M = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$ ← M mat tras Lorentz per covarianti

si può vedere con mat minkowski $\eta^{\mu\nu}$

$$a'^\nu = \Lambda^\nu{}_\gamma a^\gamma$$

$$a'_\mu = \eta_{\mu\nu} a'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\gamma a^\gamma = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\gamma \underbrace{\eta^{\gamma k} a_k}_{a^\gamma}$$

$$M_\mu{}^k = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\gamma \eta^{\gamma k} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} = M$$

$M\Lambda = \mathbb{1}$ ← M è inverso di Λ

$$\begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 & -\beta\gamma^2 + \beta\gamma^2 \\ \beta\gamma^2 - \gamma^2\beta & -\beta^2\gamma^2 + \gamma^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \qquad M_\lambda{}^{\mu} \Lambda^{\nu}{}_{\mu} = \delta^\nu_\lambda$$

delta Kronecker

$$\gamma^2(1-\beta^2) = 1 \qquad \gamma^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{1-\beta^2} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

$\delta^\nu_\lambda = 1$ se $\nu = \lambda$

$= 0$ " $\nu \neq \lambda$

Prodotto scalare è uno scalare (di Lorentz)

è invar per TL

$a^0 \to a^{0'}$ non è invariante

$$p \overset{def}{=} a_\mu b^\mu \overset{?}{=} a'_\mu b'^\mu$$

$$a'_\mu b'^\mu = \underbrace{M_\mu{}^\nu a_\nu \Lambda^\mu{}_\gamma}_{=\delta^\nu_\gamma} b^\gamma = a_\nu b^\gamma \delta^\nu_\gamma = a_\nu b^\nu = p$$

$a'_\mu = M_\mu{}^\nu a_\nu$

$b'^\mu = \Lambda^\mu{}_\gamma b^\gamma$

$\boxed{p' = p}$ ⇐ il prod scal è invar per TL

nomenclatura per 4 vett:

- a^μ di tipo tempo $\overset{def}{\iff} a_\mu a^\mu < 0$

  a^μ è il vettore che separa due eventi che avvengono a tempi diversi nella stessa posizione IN UN OPPORTUNO RIFERIM

  evento 1 $\to (ct_1, x, y, z) = x^\mu$

evento 2 $\rightarrow$ $(ct_2, x, y, z) = z^\mu$

$$\Delta x^\mu = x^\mu - z^\mu = (c(t_1 - t_2), x - x, y - y, z - z) =$$
$$= (c\Delta t, 0, 0, 0) \Rightarrow \Delta x^\mu \Delta x_\mu = -c^2 \Delta t^2 < 0$$

per $\forall$ quadriv di tipo tempo posso trovare un rif t.c. rappresenta il vett che unisce 2 eventi a tempi diversi nello stesso luogo

def a^μ è vett di tipo luce $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $a^\mu a_\mu = 0$

è un vett che separa 2 eventi connessi da un raggio di luce:

evento 1: $x^\mu = (ct_1, x_1, y, z)$

" 2: $z^\mu = (ct_2, x_1 + \underbrace{c(t_1 - t_2)}_{\text{dist percorsa da luce nel tempo } t_1 - t_2}, y, z)$

$$\Delta x^\mu \overset{def}{=} x^\mu - z^\mu = (ct_1 - ct_2, x_1 - x_1 - c(t_1 - t_2), 0, 0)$$
$$\Delta x^\mu \Delta x_\mu = c^2 \left[-(t_1 - t_2)^2 + (t_1 - t_2)^2\right] = 0$$

• def a^μ è vett di tipo spazio $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $a_\mu a^\mu > 0$

rappres il vett che separa 2 eventi che avvengono contemporaneamente in posiz diverse IN UN OPPORTUNO RIF

$x^\mu = (ct, x_1, y, z)$
$z^\mu = (ct, x_2, y, z)$ $\Rightarrow$ $\Delta x^\mu = x^\mu - z^\mu =$
$= (0, x_1 - x_2, 0, 0)$

$$\Delta x^\mu \Delta x_\mu = \underbrace{(x_1 - x_2)}_{\text{dist}}{}^2 > 0$$

vedremo le TL possono invertire l'ordine di eventi solo se sono separati da vett di tipo spazio

PROPRIETÀ di TL

① se v non è $\parallel$ all'asse x : ruotare assi in modo che $v \parallel x$, e poi rotaz inversa

v indirez arbitr

$$\tilde{\Lambda}^{v} = D^{-1} \Lambda D$$

rotaz

② TL formano un gruppo

def GRUPPO : un set di matrici con legge di composiz (prod righe x colonna qui) t.c.

1 interno
2 associativo
3 $\exists$ el neutro $\mathbb{1}$ TL da un rif a sé
4 $\forall g$ $\exists$ el inverso g^{-1}

M è una TL (cambio segno a β)

$\Lambda M = \mathbb{1}$

Gruppo di Lorentz : TL + rotazioni

def TENSORE RELATIVISTICO

T TENSORE $\begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ è una fn lineare in ciascuno degli argomenti di N vettori controvarianti che restituisce uno scalare relati...

$$T = T(\underline{v}, \underline{u}, \underline{w}, \dots) = n$$

di solito $\to$ indicato con le componenti con base di 4vett controv $\underline{e}(\alpha)$ $\alpha = 0, 1, 2, 3$

$$T_{\alpha\beta\gamma\dots} \overset{def}{=} T(\underline{e}(\alpha), \underline{e}(\beta), \underline{e}(\gamma) \dots)$$

N indici

indice in basso

applicare un tensore T ad N vettori $a^\mu b^\nu \dots$

$$T(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \dots) = \sum_{\alpha\beta\gamma} \underbrace{T_{\alpha\beta\gamma\dots} a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots}$$

estensione del prod righe per colonna

vett covarianti (1-forme) $\to$ sono tensori $\binom{0}{1}$

mangiano un 4vett e danno uno scalare: prod scalare

$$a_\mu (b^\mu) = a_\mu b^\mu = p$$

i tensori non cambiano se cambio sist di rif, ma le loro componenti cambiano!

$$M^\mu{}_\nu a_\mu = a'_\mu$$

si generalizza a $\forall$ tensore $\binom{0}{N}$ $\to$ ciascuna componente del tensore va saturata con M

$$T'_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots} = M^{\beta_1}{}_{\alpha_1} M^{\beta_2}{}_{\alpha_2} M^{\beta_3}{}_{\alpha_3}\cdots T_{\beta_1\beta_2\beta_3\dots}$$

Tensori misti $\binom{Q}{N}$ $\overset{def}{\iff}$ tensori dove ho sollevato

Q indici usando mat $\eta^{\mu\nu}$

si trasformano con mat M per gli indici covar

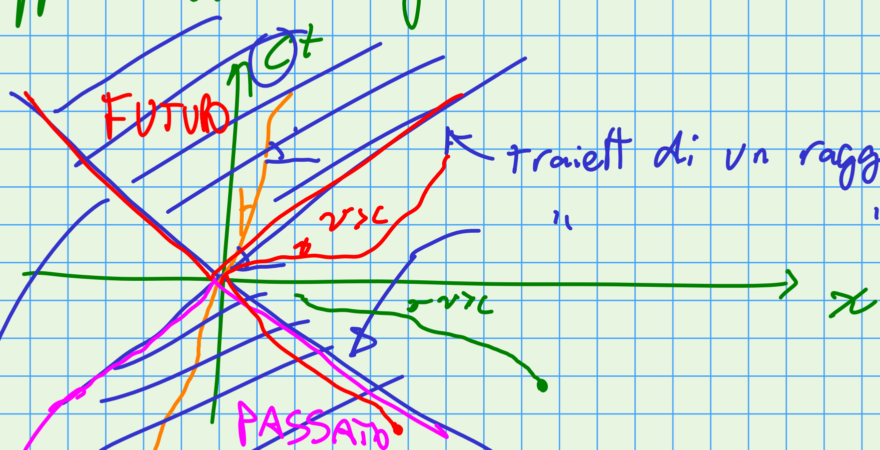
" " " Λ " " " controv

$$T'^{\alpha_1}{}_{\alpha_2} = \Lambda^{\alpha_1}{}_{\beta_1} M^{\beta_2}{}_{\alpha_2} T^{\beta_1}{}_{\beta_2}$$

sist 2 sist 1

Diagrammi spaziotempor → rappresentaz geom le TL

rappres di tutti gli eventi



traiett di un raggio di luce verso x pos

" " " " " neg

traiettoria di part e viaggia a vel $v \ll c$

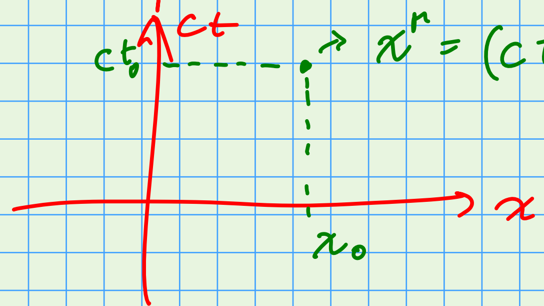
⇒ l'angolo con l'asse x > 45°

la traiettoria è compresa tra le bisettrici

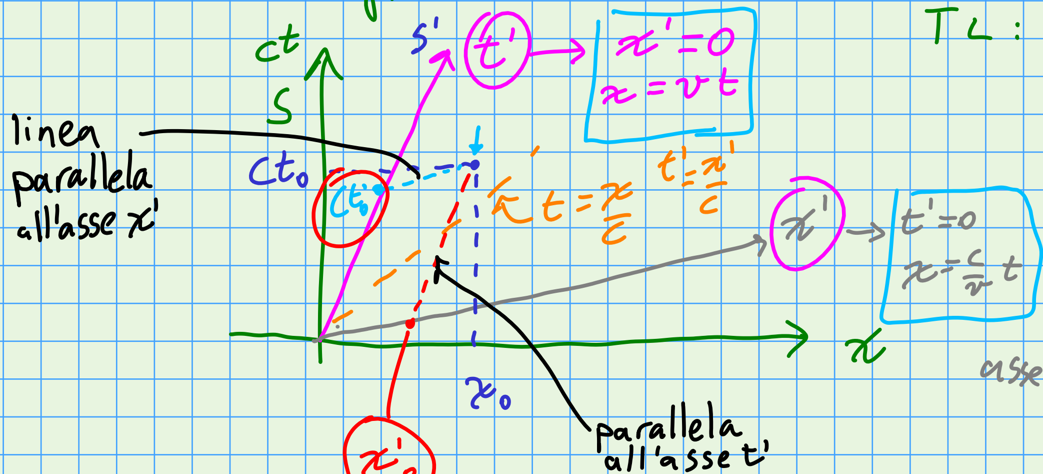
→ regione (disp tempo) che può essere influenzata da una partic all'origine al tempo t=0 → FUTURO (cono luce)

→ regione che può influenzare l'origine con partic che viaggiano a vel $v < c$ → PASSATO

Ciascun punto del diagramma è un evento



TL sui diagrami SPT



TL: $t' = \gamma(t - \frac{v}{c} x)$

$x' = \gamma(x - vt)$

S' → ct', x'

$x' = 0$ ⇒ $x = vt$

asse x': $t' = 0$ $\quad t = \frac{v}{c} x$

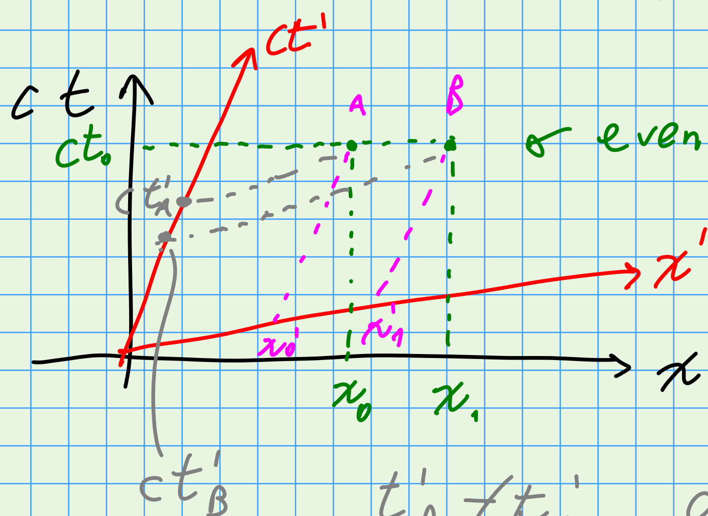
$x = \frac{c}{v} t$

TL geometricam sono trasformazioni $\boxed{\text{iperboliche}}$

perché conservano intervalli: $-c^2 t^2 + x^2$

(cioè conservano i prod scalari ⇒ moduli dei 4vettori)

RELATIVITÀ della SIMULT



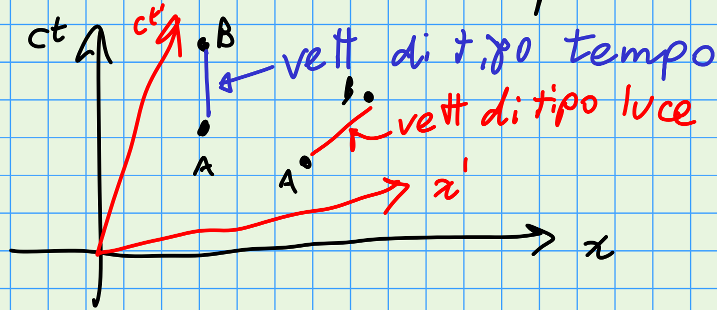
• eventi contemporanei in S (nero)

$t'_B \neq t'_A$ anche se $t_A = t_B = t_0$

ORDINAMENTO di INTERVALLI di TIPO TEMPO

○ LUCE è ASSOLUTO:

eventi connessi da vett di tipo tempo o luce hanno ordinamento che non può cambiare



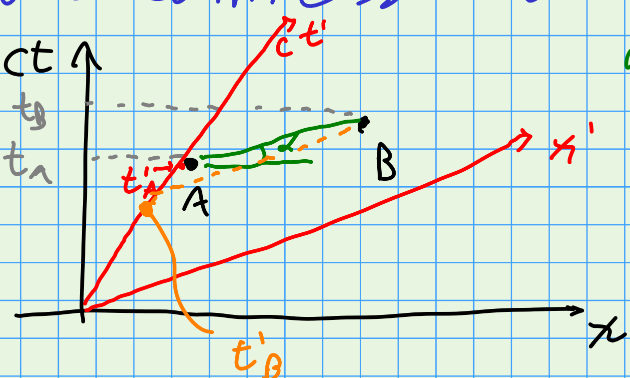
in ∀ sistema di riferimento

$t_A < t_B$

$t'_A < t'_B$

INVECE l'ordinamento NON è assoluto se gli eventi sono connessi da vett di tipo spazio

$\alpha < 45°$



in $S \rightarrow t_A < t_B$

in $S' \rightarrow t'_B < t'_A$

cambiando rif l'ordine degli eventi è scambiato

(esempio → paradosso scala-garage)

CAUSALITÀ e $\underbrace{\text{SEGNALI SUPERLUMINALI}}$

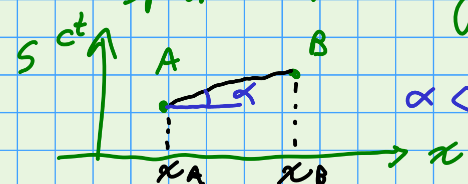
trasmissione di info o di materia a velocità $v > c$

Tachioni → particelle ipotetiche con $v > c$

Se esistessero i tachioni → problemi di causalità

paradosso tigre e del cacciatore:

cacciatore spara alla tigre con proiettili tachioni



$\alpha < 45°$

tigre e cacciat fermi nel rif S

evento A $\rightarrow$ cacciatore spara
" B $\rightarrow$ tigre muore

} sono connessi da un vett di tipo spazio

(perché proiettile viaggia a vel $v > c$ $\Rightarrow \alpha < 45^0$

in S la tigre muore dopo che il cacciatore spara $t_A < t_B$

in S' $t'_B < t'_A$ ~~a~~ per un osser v in moto la tigre muore prima che il cacciatore spara!

causa ed effetto non hanno ordinamento giusto se esistessero i tachioni

$$\boxed{\text{CAUSALITÀ (causa prima degli effetti)} \Rightarrow \text{relatività falsa OPPURE no tachioni}}$$

per questo si pensa che tachioni non esistono (mai stati visti)