FISICA 2 2/12/20

Contrazione lunghezze

lungh treno per T

$\Delta x_T \geq \Delta x_S$ ← lungh treno per S

$= \gamma \Delta x_S$

dimostraz per righello particolare ⇒ deve valere in generale

Prin relatività → l'osservatore T vede i righelli stazione accorciati

lunghezza del treno

$\Delta x_T(T) \geq \Delta x_S(T)$

$\Delta x_T(S) \leq \Delta x_S(S)$

righello alla stazione

il proprio righello è il più lungo

paradosso apparente: entrambi affermano che il proprio righello è il più lungo: chi ha ragione → ENTRAMBI!

ATTENZIONE: misurare la lunghezza di qualcosa devo guardare dove si trovano gli estremi del righello allo stesso istante

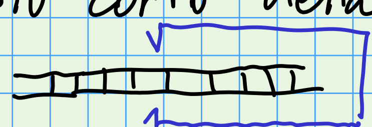
↓

relatività della simultaneità!

⇒ entrambi possono (grazie alla rel della simult) affermare che il proprio è il più lungo

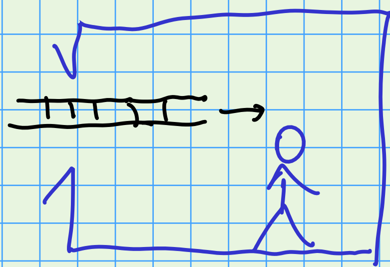
PARADOSSO SCALA e del garage: contraz lunghezze

garage più corto della scala nello sist di rif

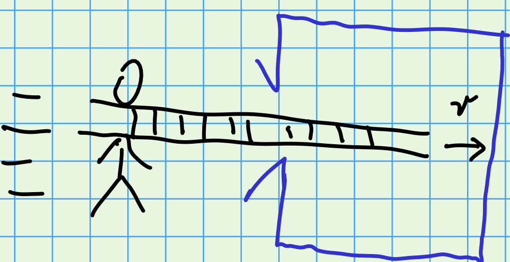


← scala ferma risp garage

corri molto velocem ⇒ contraz delle lunghezze la scala si accorcia



l'osserv G: la scala entra nel garage



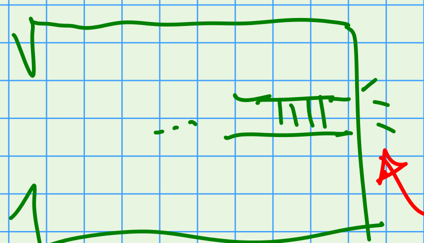
l'osservatore S: la scala non entra nel garage

Chi ha ragione? → ENTRAMBI : relatività della simult

cosa vuol dire "scala entra nel garage"

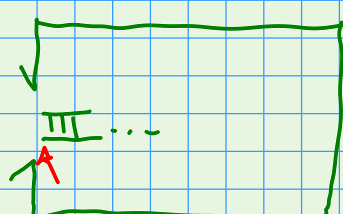
DUE EVENTI (→ punto dello spazio, istante di tempo)

(A)



l'inizio della scala tocca il garage

(B)



il fondo della scala passa dalla porta

"la scala entra" ≡ $\boxed{\text{l'evento (A) avviene DOPO (B)}}$

l'osservatore G

⇒ contemporaneamente i due estremi della scala sono dentro "la scala non entra" ≡ $\boxed{\text{l'evento (A) avviene prima di (B)}}$

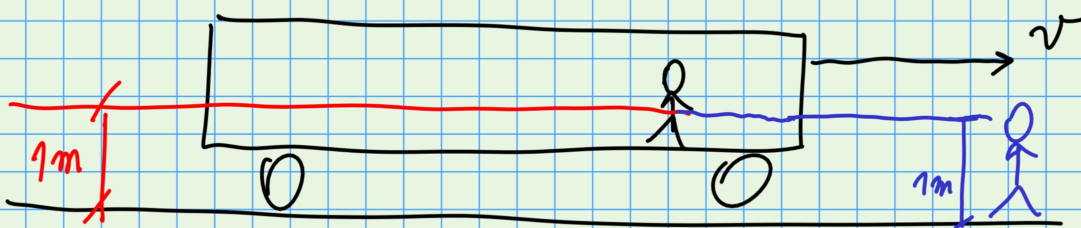
osservat S

entrambi hanno ragione → relatività simult

l'ordinamento degli eventi NON è assoluto
dipende dal sistema di riferimento

vedremo che l'ordinam di alcuni eventi È ASSOLUTO

③ invarianza delle lunghezze trasversali al moto



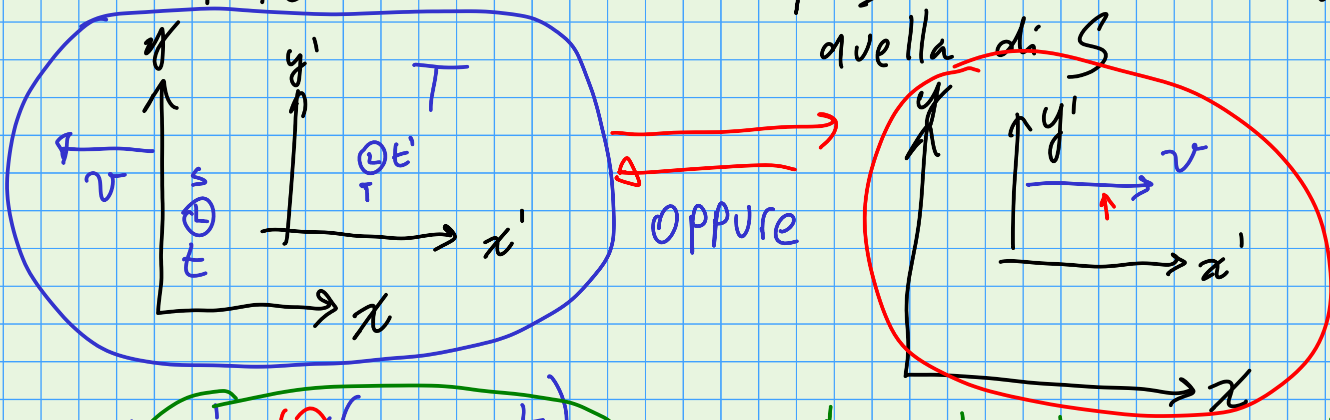
il princ di relatività ⇒ il segno blu e rosso si sovrappongono: entrambi vedono la stessa lunghezza trasversa

Se per assurdo avessi una contrazione ⇒ la linea rossa sarebbe sotto alla blu
anche l'oss sul treno vedrebbe la rossa sotto la blu
⇒ T concluderebbe che c'è espansione

⇒ dimensioni ⊥ al moto sono inalterate
(dato implicitamente nella dim della dilataz dei tempi)

TRASFORMATE di LORENTZ

↳ regole per tradurre le quantità fisiche da un riferimento all'altro: passo dalla descriz di T a quella di S



$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases}$$

← contraz lunghezze longitudinali ($\vec{v}$ è ∥ asse x)

← invarianza delle lung trasversali

← dilataz dei tempi

dim:

senza contraz lunghezze: $x' = x - vt$

(al tempo t l'asse x' si è spostato di quantità vt risp x)

la contraz lungh longitudinali $\Delta x_T = \gamma \Delta x_S$

$\Delta x' = \gamma \Delta x$

$$\Rightarrow x' = \gamma(x - vt)$$

per t dobbiamo usare prin relatività:

per prin relatività $\quad x = \gamma(x' + v t')$

$$\Leftrightarrow t' = \frac{x}{\gamma v} - \frac{x'}{v} = \frac{x}{\gamma v} - \frac{1}{v}\left(\gamma(x - vt)\right) =$$

$$= \gamma t + x\left(\frac{1}{\gamma v} - \frac{\gamma}{v}\right) = \gamma t - \frac{x}{v}\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right) \quad \gamma\frac{v^2}{c^2}$$

$$\gamma - \frac{1}{\gamma} = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} = \frac{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - 1}{\gamma} = \frac{\frac{1 - 1 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\gamma} =$$

$$= \frac{v^2}{c^2}\frac{\gamma^2}{\gamma} = \gamma\frac{v^2}{c^2}$$

$$= \gamma t - \gamma \frac{v}{c^2} x = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2} x\right)$$

NOTAZIONE RELATIVISTICA → 4 - VETTORI

conveniente unire posiz e tempo in unico vettore → 4 comp

una compon temporale (comp 0)

3 " spaziali (1,2,3)

→ visione geometrica relatività

↳ SPAZIOTEMPO

4-vett posizione $x^{\mu} = \underline{x} = (ct, x, y, z)$ cost dim

$x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$

T di Lorentz

$$x^{0'} = \gamma\left(x^0 - \beta x^1\right)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2} x\right)$$

$$x^{1'} = \gamma\left(x^1 - \beta x^0\right) \leftarrow x' = \gamma(x - vt)$$

$$x^{2'} = x^2 \leftarrow y' = y$$

$$x^{3'} = x^3 \leftarrow z' = z$$

$$\beta \overset{def}{=} \frac{v}{c} \qquad \gamma \overset{def}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

notaz matriciale (è lineare)

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\overset{def}{=} \Lambda} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

prod righe × colonne

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}$$

prodotto righe × colonna della mat $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ × vett colonna x^{ν}

indice alto, indice basso

$= \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}$

notaz di Einstein: indice ripetuto vuol dire che somma sottointesa

def astratta di quadrivettore: un set di 4 indici che rappresentano la fisica che si trasformano con T Lorentz nel passare da un rif all'altro

$$v'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, v^{\nu}$$

$$\underline{v}' = \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{v}$$

T di addizione delle velocità: conseguenza delle TL

devo trasformare la velocità u da un rif all'altro (la velocità non è un 4-vettore)

$$u = \frac{dx}{dt} \longrightarrow u' = \frac{dx'}{dt'}$$

uso v per la velocità del sist di rif

$$x' = \gamma(x - vt) \Rightarrow dx' = \gamma(dx - v\,dt)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \Rightarrow dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)$$

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\cancel{\gamma}(dx - v\,dt)}{\cancel{\gamma}\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v\right)}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} =$$

$$= \frac{u - v}{1 - \frac{vu}{c^2}}$$

formula di addiz (sottraz) delle velocità che avevamo usato

PRODOTTO SCALARE TRA 4VETTORI

$$p \overset{def}{=} -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 = -a^0 b^0 + \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$a^\mu = (a^0, \vec{a})$

$b^\mu = (b^0, \vec{b})$

Perchè si usa questa def?

↳ è invariante per T. Lorentz

$$p = \underline{a} \cdot \underline{b} \underset{\text{vedremo}}{=} \underline{a}' \cdot \underline{b}'$$

NOTAZIONE

$$p = \underset{\text{indice alto}}{a^\mu} \underset{\text{indice basso}}{b_\mu} = a_\mu b^\mu \underset{\text{not Einstein}}{=} \sum_\mu a_\mu b^\mu$$

dove il 4-vettore con indice basso è un vettore

COVARIANTE : $a_\mu = (-a^0, a^1, a^2, a^3) =$

indice basso

$= (a_0, a_1, a_2, a_3)$

cambio segno alla comp tempor $a^0 = -a_0$

i vett covarianti → sono 1- forme (vettori duali)

"si mangiano" un vettore e restituiscono un numero

$$a_\mu(\underset{\text{vett controv}}{\cdot}) = p \qquad a_\mu(b^\mu) \overset{def}{=} a_\mu b^\mu = p$$

i 4-vettori (indice alto) si chiamano vettori CONTROVARIANTI

il segno − nei vett covarianti → fisicamente rappresenta il tempo (gradi di lib temporali)

visione geom della relatività → vett a 4 comp

sp e tempo sono quantità diverse

SEGNATURA → − + + +

MATRICE di MINKOWSKI : per tradurre vett controv in vett covarianti e viceversa:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \eta_{\mu\nu} = \eta^{-1}_{\mu\nu}$$

serve per alzare e abbassare indici

$$a^{\mu} = \sum_{\nu} \eta^{\mu\nu} a_{\nu} \qquad a_{\nu} = \sum_{\mu} \eta_{\mu\nu} a^{\mu}$$

$\eta_{\mu\nu}$ → tensore metrico (metrica pseudo riemanniana)

in relatività generale $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$ tensore metrico