FISICA 2 24/11/20

ONDE

$$\underline{f \text{ è reale} \Rightarrow F(\vec{k}) = F^*(-\vec{k})}$$

$$f(\vec{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k}\, F(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3_+} d^3\vec{k} + \int_{\mathbb{R}^3_-} d^3k$$

se $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z) \in \mathbb{R}^3_+$

$\Rightarrow -\vec{k} = (-k_x, -k_y, -k_z) \in \mathbb{R}^3_-$

vettori con compon $k_z \geq 0$

vett con comp $k_z < 0$

$$= \int_{\mathbb{R}^3_+} d^3k + \int_{\mathbb{R}^3_+} d^3k'\, F(-\vec{k}')\, e^{-i\vec{k}'\cdot(\vec{r} - \vec{v}t)}$$

$\omega = \vec{k}\cdot\vec{v}$

$k' = -k$

$$= \int_{\mathbb{R}^3_+} d^3k\, \underbrace{F(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r} - \vec{v}t)} + F(-\vec{k})\, e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r} - \vec{v}t)}}_{\in \mathbb{R} \iff F(\vec{k}) = F^*(-\vec{k})}$$

cc

e^{ikz} è una base per spazio funzionale delle funzioni $f(x) \Rightarrow f(x) = \int dk\, F(k)\, e^{ikx}$

CNES Base: v_n è base $\iff \forall u \ \sum_k v_n (u, v_k) = u$

$$\boxed{f(z) = \int dk\, e^{ikz} F(k)}$$

$$F(k) = (e^{ikz}, f(z)) \stackrel{def}{=} \int \frac{dz'}{2\pi} e^{-ikz'} f(z')$$

$$u = \sum_n v_n (u, v_n)$$

prod scal distribuzioni temperate

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} = \delta(z)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ikz} F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{2\pi} e^{ikz} e^{-ikz'} f(z')}^{F(k)} =$$

$$= \int dz' \underbrace{\int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(z-z')}}_{= \delta(z-z')} f(z') = \int dz'\, \delta(z-z') f(z') = f(z)$$

$$\delta(x) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{a^2}}$$

integrale gaussiano $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\alpha x^2 + \beta x} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}$

$$\lim_{a \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikz - \frac{a^2 k^2}{4}} = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{a^2}}$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \Rightarrow \forall f$$ il cui integrale converge è esprimibile come Trasformata di Fourier

PRINCIPIO di HUYGENS-FRESNEL

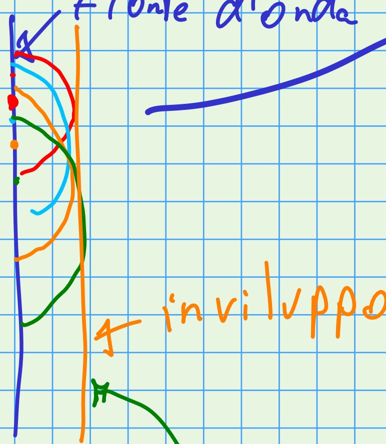
↳ in realtà è una conseguenza del th Kirchoff

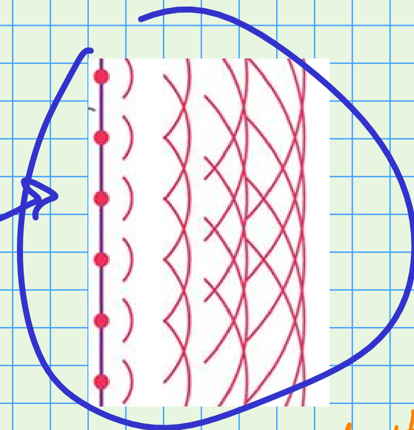
in un'onda ciascun punto del fronte d'onda può essere

considerato come una sorgente di onde sferiche
⇒ il fronte d'onda successivo è l'inviluppo delle onde sferiche

Caso di onda piana:

fronte d'onda





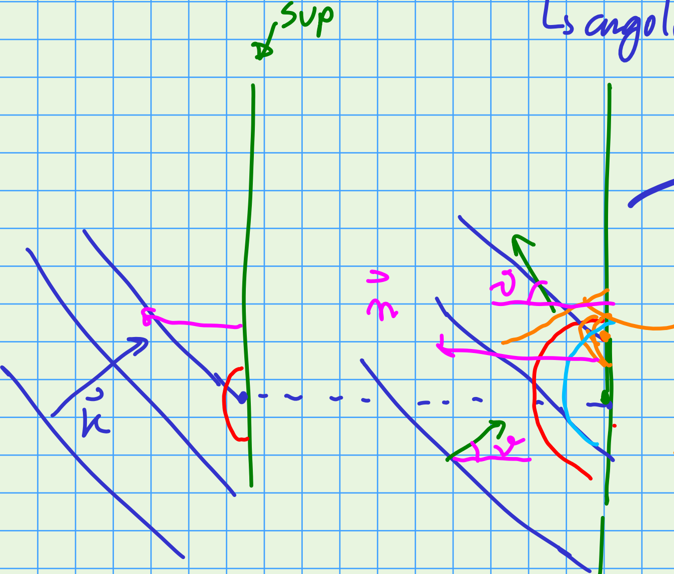
← inviluppo → la somma di tutte le onde sferiche
⇓
c'è interferenza distruttiva (cioè la somma è nulla) in tutte le direzioni eccetto nella direz propagaz dove la somma dà un nuovo fronte ∥ al primo

dà una buona descrizione qualitativa di fenomeni ondulatori:

RIFLESSIONE, RIFRAZIONE, DIFFRAZIONE, DISPERSIONE

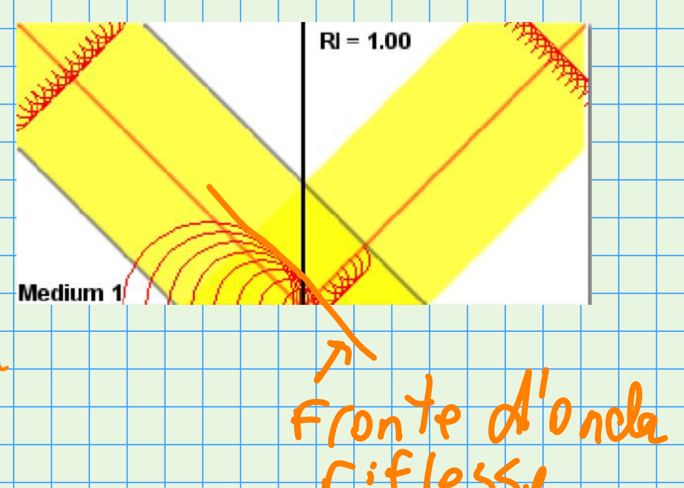
1 RIFLESSIONE: angolo incidenza = angolo riflessione
↳ angolo tra vett $\vec{k}$ e ⊥ alla superficie

sup



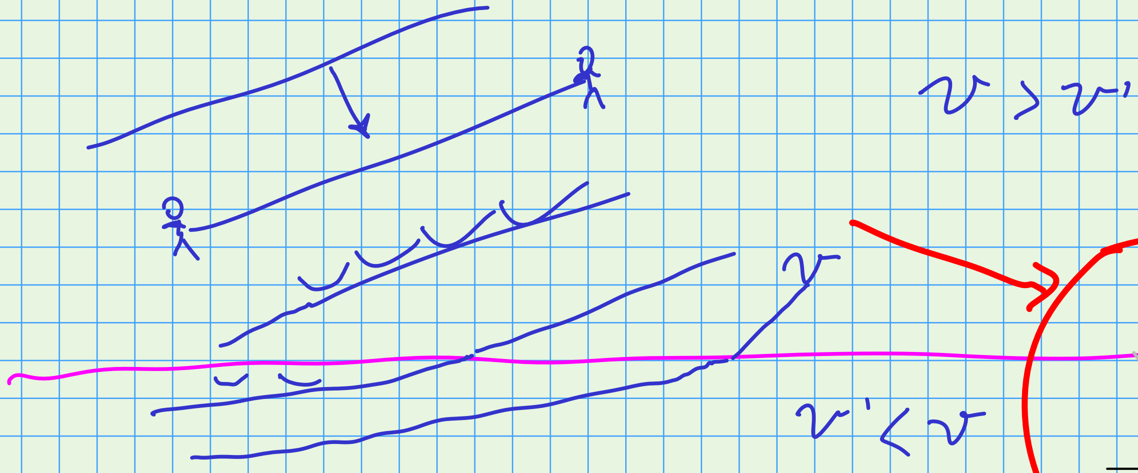
$\vec{k}$ $\vec{n}$ $\vec{v}$

fronte d'onda riflesso ha

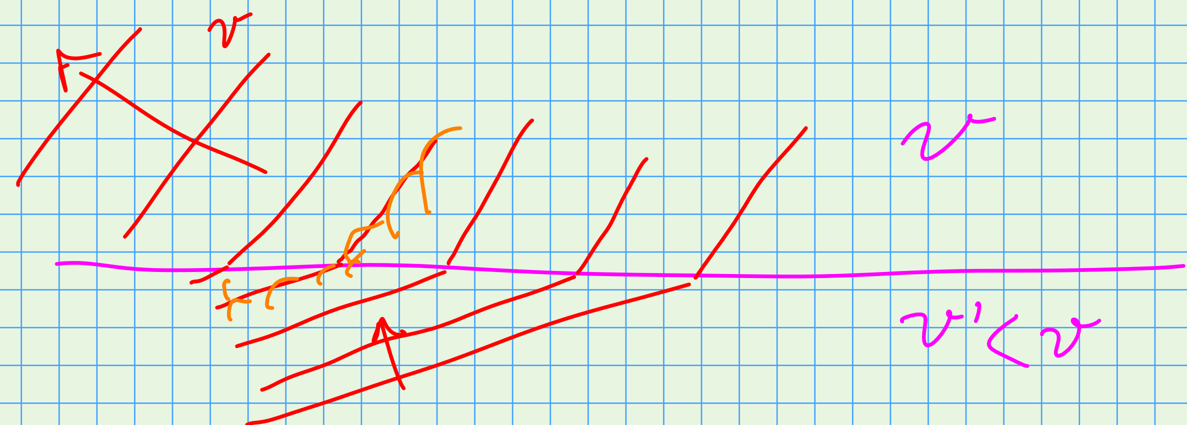


fronte d'onda riflesso

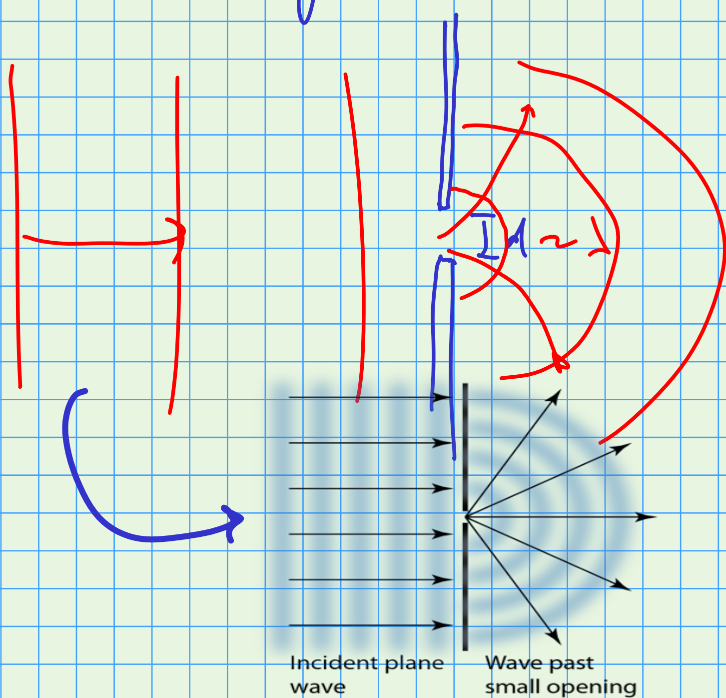
② RIFRAZIONE: se l'onda passa da un mezzo dove ha vel v ad un mezzo con vel v'

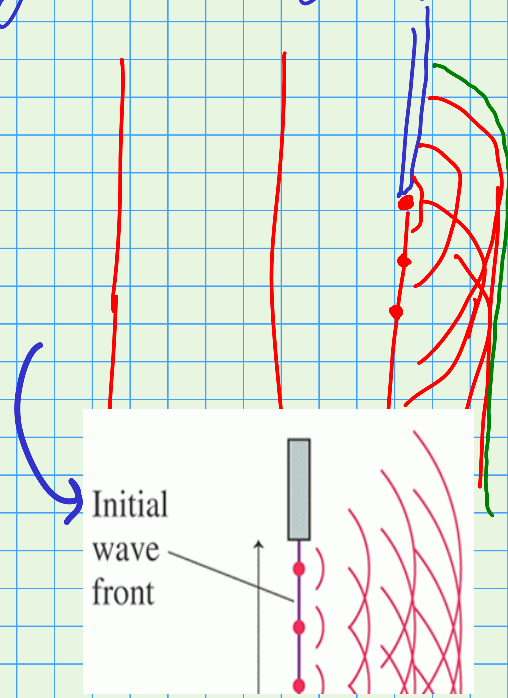


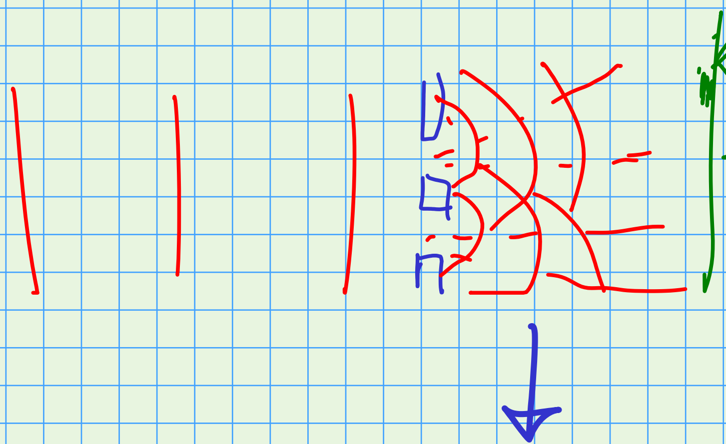
se l'onda fa il percorso inverso



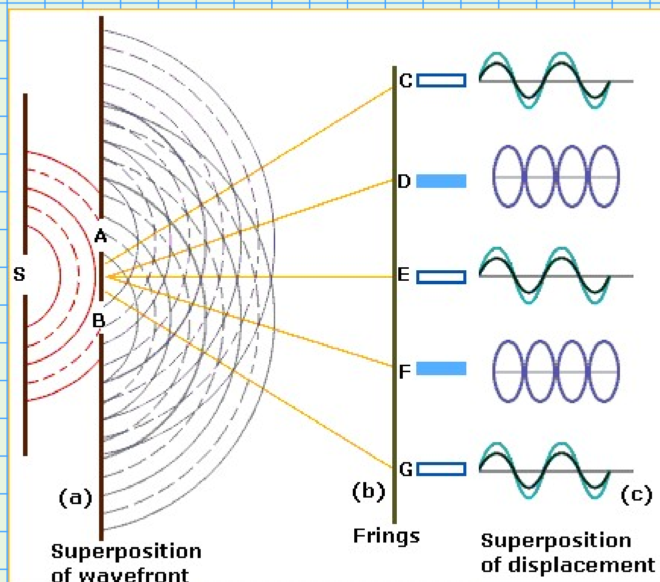
③ DIFFRAZIONE: l'onda incontra una o più aperture dell'ordine di grandezza della lunghezza d'onda

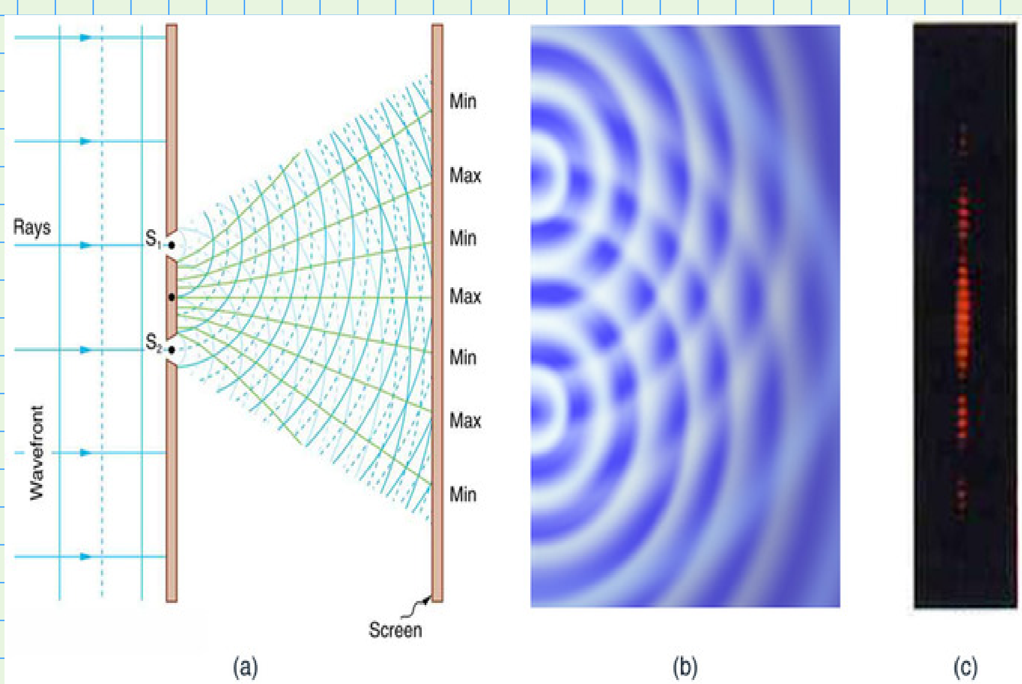


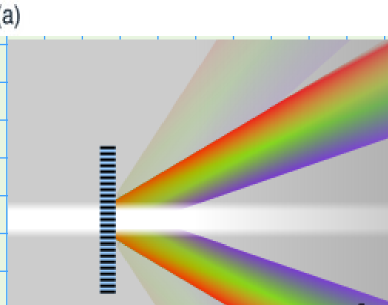




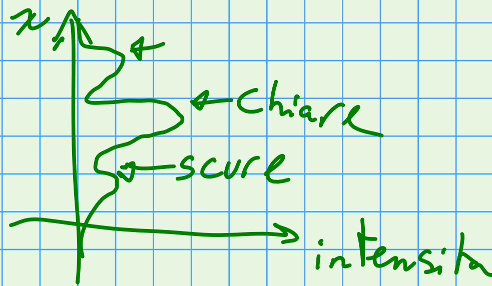
schermo
macchie chiare
macchie scure







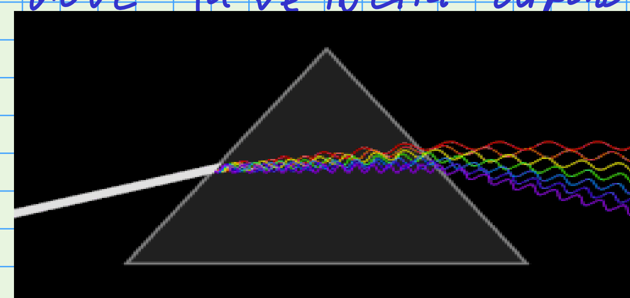
= reticolo di diffrazione (molte fenditure, ad esempio un cd illuminato da luce bianca)

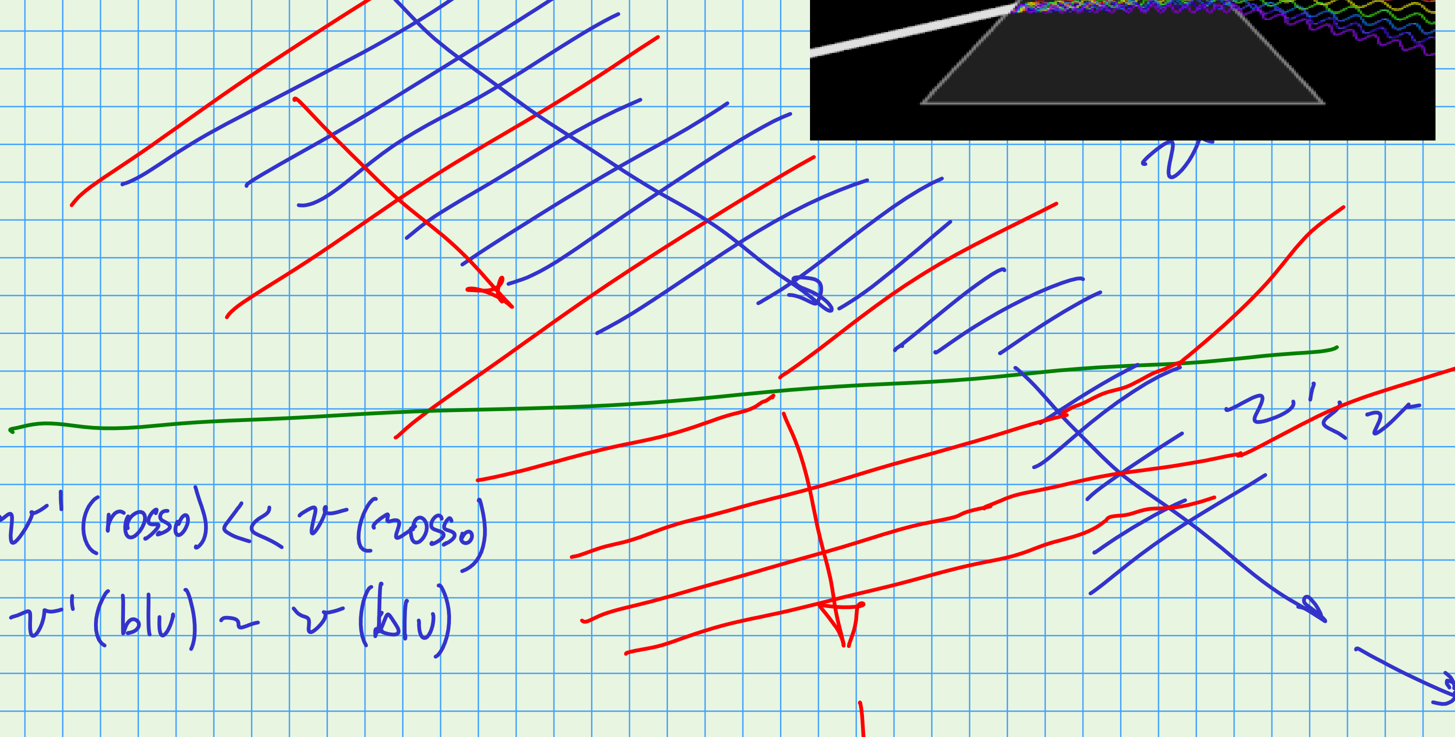


tante fenditure → reticolo di diffrazione

5) DISPERSIONE (PRISMA)

↳ è una rifrazione in un mezzo dove la velocità dipende dalla lunghezza d'onda





$v'(\text{rosso}) \ll v(\text{rosso})$

$v'(\text{blu}) \sim v(\text{blu})$

Prisma; arcobaleno → gocce d'acqua fanno da prisma

ONDE ELETTROMAGNETICHE → nel vuoto: $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$

4° eq Maxw: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \cancelto{0}{\mu_0 \vec{j}} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

rot di ambo i membri → rot rot = grad div − laplaciano

$$\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec B) = \vec\nabla(\underbrace{\vec\nabla\cdot\vec B}_{=0\ 3^\circ M}) - \underbrace{\nabla^2}_{\text{div grad}}\vec B = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\underbrace{\vec\nabla\times\vec E}_{=-\frac{\partial\vec B}{\partial t}\ 2^\circ M})$$

$$\nabla^2\vec B = \frac{\vec B}{|\vec B|}\nabla^2|\vec B|$$

$$-\nabla^2\vec B = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec B}{\partial t^2} \iff \boxed{\Box\vec B = 0} \qquad \Box = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\boxed{c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}}$$ è velocità della luce

← storicamente è quello che ha fatto capire a Maxw che luce = onda elm

stessa dimostraz se partiamo da 2° $\vec\nabla\times\vec E = -\frac{\partial\vec B}{\partial t}$

rot ambo i m ... $\Rightarrow \boxed{\Box\vec E = 0}$

anche i potenziali soddisfano a eq d'onda

gauge di Coulomb eq Max $\iff$ $\nabla^2 V = 0$, $\Box\vec A = 0$

" " Lorentz " " $\iff$ $\Box V = 0$, $\Box\vec A = 0$

Dalle eq per i campi: i campi el e mag soddisfano a eq d'onda che viaggia a vel $v = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ → costanti fisiche

$\Rightarrow$ c è una costante fisica

strano: la velocità di solito dipende dal sistema di riferimento

auto viaggia a 100 Km/h rispetto all'autostrada
" " " 0 Km/h " al guidatore
" " " 50 Km/h " all'autobus che sta superando

si è cercato di trovare il riferimento rispetto a cui la velocità luce è c → "ETERE"

esperimento di Michelson - Morley
esperimenti falliscono → la vel della luce è sempre C

↳ Einstein → se non troviamo l'etere ⇒
POSTULIAMO che l'etere non ∃ cioè postuliamo che la vel della luce è invariante → Postulato 2 della relatività

ONDE ELM sono onde trasversali
$\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono ⊥ alla direz $\vec{k}$ (per ogni compon $\vec{k}$)
e sono $\vec{E} \perp \vec{B}$

COMPONENTI $\vec{k}$: sono le compon di Fourier del campo

trasf di Fourier

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \, \underbrace{\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})}_{\text{coeffic } \vec{k}} \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \, \overbrace{\vec{\mathcal{B}}(\vec{k})} \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

nel vuoto $\vec\nabla\cdot\vec E = 0$ $\Rightarrow 0 = \vec\nabla\cdot\int d^3k\, \vec{\mathcal{E}}(\vec k)\, e^{i(\vec k\cdot\vec r-\omega t)}$

$\uparrow$ 1° eq M

$= \int d^3k\, \vec{\mathcal{E}}(\vec k)\cdot\vec\nabla e^{i(\vec k\cdot\vec r-\omega t)} = i\int d^3k\, \vec{\mathcal{E}}(\vec k)\cdot\vec k\, e^{i(\vec k\cdot\vec r-\omega t)}$

$\vec\nabla\cdot(\vec a f) = \cancel{(\vec\nabla\cdot\vec a)f} + \vec a\cdot\vec\nabla f$

$=0$

gli esp immaginari sono lin indip (base)

$\Leftrightarrow \vec{\mathcal{E}}(\vec k)\cdot\vec k = 0 \quad \forall \vec k \Leftrightarrow \vec{\mathcal{E}}(\vec k)\perp\vec k \quad \forall\vec k$

Stesso discorso per $\vec B$: $\vec\nabla\cdot\vec B = 0$ $\Rightarrow \vec{\mathcal{B}}(\vec k)\perp\vec k$

$\uparrow$ 3° M

def ONDE TRASVERSE: le componenti $\vec{\mathcal{E}}(\vec k)$ e $\vec{\mathcal{B}}(\vec k)$ sono $\perp$ a $\vec k$ (vettore d'onda) $\forall\vec k$

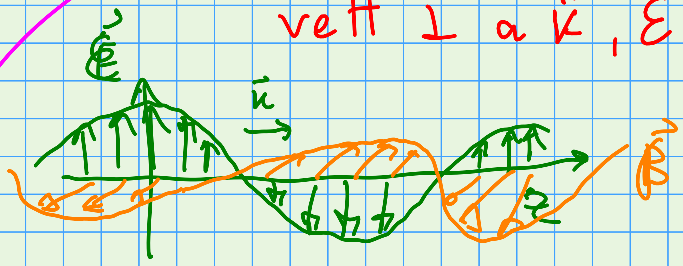
campi el e mag sono $\perp$ alla propagaz

inoltre $\vec\nabla\times\vec E = -\frac{\partial\vec B}{\partial t}$ 2° eq M $\Rightarrow$

$\vec\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec k)\, e^{i(\vec k\cdot\vec r-\omega t)} = i\vec k\times\vec{\mathcal{E}}(\vec k)\, e^{i(\vec k\cdot\vec r-\omega t)}$

$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathcal{B}}(\vec k)\, e^{i(\vec k\cdot\vec r-\omega t)} = -i\omega\vec{\mathcal{B}}(\vec k)\, e^{i(\vec k\cdot\vec r-\omega t)}$

$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\vec k\times\vec{\mathcal{E}}(\vec k)}_{\text{vett }\perp\text{ a }\vec k,\ \vec{\mathcal{E}}} = \omega\vec{\mathcal{B}}(\vec k)}$ $\Rightarrow \vec{\mathcal{B}}$ è $\perp$ a $\vec k$ e $\perp$ a $\vec{\mathcal{E}}$



$\vec{\mathcal{E}}$ ∥ asse x

$\vec{\mathcal{B}}$ ∥ " y

$\vec k$ ∥ " z

→ modulo di ambo i m: $k\,\mathcal{E}(\vec{k}) = \omega\,B(\vec{k})$

$\frac{\omega}{k} = c \Rightarrow B(k) = \mathcal{E}(k)/c$ (nel SI)

SPETTRO del CAMPO ELM:

per ragioni storiche le onde elm hanno nomi diversi a seconda della frequenza (o lunghezza d'onda)

$\lambda\nu = c$

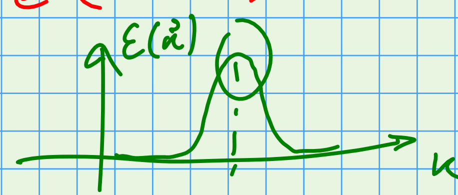
freq

velocità

lungh d'onda

↳ cioè consideriamo uno svil di Fourier e prendiamo la freq t.c. $\mathcal{E}(\vec{k})$ è massima

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \int d^3k\, \mathcal{E}(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$



$k_{MAX} \to \omega_{MAX}$

ad esempio luce visibile onde elm $\lambda \sim 5\cdot 10^{-7}\,m$

$\nu \sim 10^{15}\ Hz$