FISICA 2 19/11/20

T. Poynting : momento (conservazione)

Forza totale su $\rho, \vec{j}$: da forza di Lorentz:

$$\vec{F} = \int_V d^3r \, \rho\vec{E} + \underset{\rho\vec{v}}{\vec{j}} \times \vec{B} \overset{def}{=} \int_V d^3r \, \vec{f}$$

$\vec{f}$ densità di forza

F di Lorentz per densità: $\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B} = \varepsilon_0(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E} + \dfrac{(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0 \dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}$

in termini dei campi:

$\rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ 1° M

$\vec{j} = \dfrac{\vec{\nabla}\times\vec{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0 \dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ 4° M

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}) - \vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\times\vec{E}$ 2° M

$$\varepsilon_0(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E} + \frac{(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}) - \varepsilon_0\vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) =$$

$\mu_0\vec{S}$

$$\varepsilon_0(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E} + \frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\vec{B} + \frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B} + \varepsilon_0(\vec{\nabla}\times\vec{E})\times\vec{E} - \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B})$$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ 3° M

$$= \vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{T}} - \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}) = \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{T}} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{S}}{\partial t} = \vec{f}}$$

prod righe x colonna di vett riga x matrice = vett riga

$$\left(\vec{\vec{T}}\right)_{ij} \overset{def}{=} \varepsilon_0\left(E_iE_j - \frac{\delta_{ij}}{2}E^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_iB_j - \frac{\delta_{ij}}{2}B^2\right)$$

$i, j = x, y, z$

$\delta_{ij} \to$ delta di Kronecker:

$\delta_{ij} = 1$ se $i = j$

$\phantom{\delta_{ij}} = 0$ se $i \neq j$

Tensore degli sforzi di Maxwell

$$\boxed{\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{T}}} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = \vec{f}} \Rightarrow \vec{F} = \int_V d^3r\, \vec{f} = \int_V d^3r \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{T}} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{S}}{\partial t}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}$$

forza = derivata del momento $\vec{p}$

mom meccanico

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p} + \mu_0\varepsilon_0 \int_V d^3r\, \vec{S}\right) = \int_V d^3r\, \vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{T}} \overset{\text{t. Gauss}}{=} \int_{S=\partial V} d^2r\, \underbrace{\vec{n}\cdot\vec{\vec{T}}}_{\text{vettore}}$$

interpretaz fisica.

momento del campo elm in V

flusso del momento attraverso la sup $S = \partial V$

conservazione del momento : mom tot = vettore di Poynt in V + mom uscente

se $V \to \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ il termine $S \to 0 \Rightarrow$

$\mu_0\varepsilon_0 \int_{\mathbb{R}^3} d^3r\, \vec{S}$ = momento totale del campo elm

caso statico $\Rightarrow \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = 0$ $\quad \boxed{\vec{F} = \int_S d^2r\, \vec{n}\cdot\vec{\vec{T}}}$

$\vec{\vec{T}}$ è la forza per unità di sup del campo elm

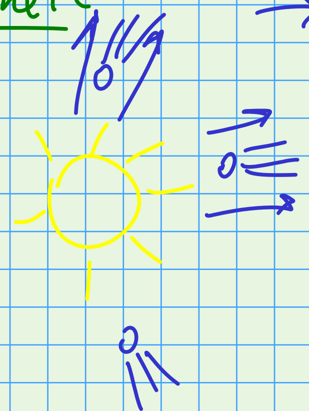
APPLICAZIONI della PRESSIONE di RADIAZIONE

vele solari : sono sistemi di propulsione per satellite : vele fatte di carta stagnola

Pioneer anomaly : accelerazione delle sonde

spiegazione accreditata → pressione di radiazione

code delle comete → pressione di radiaz della radiaz solare sui gas emessi dalla cometa

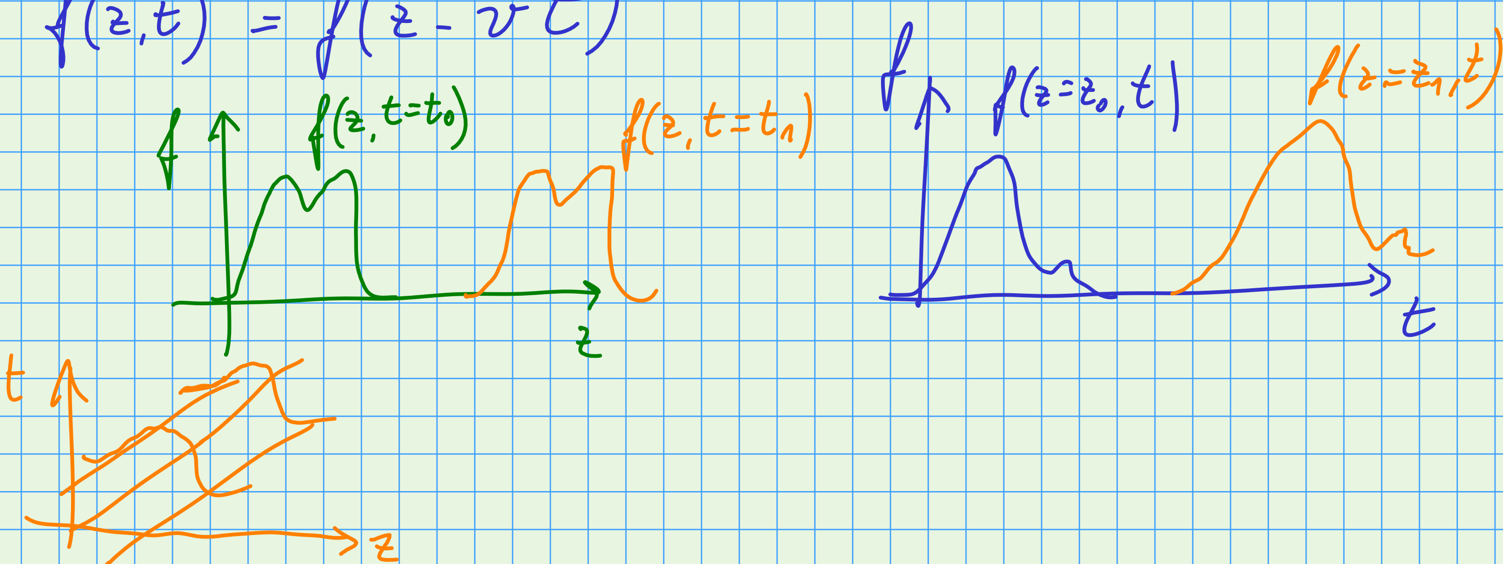


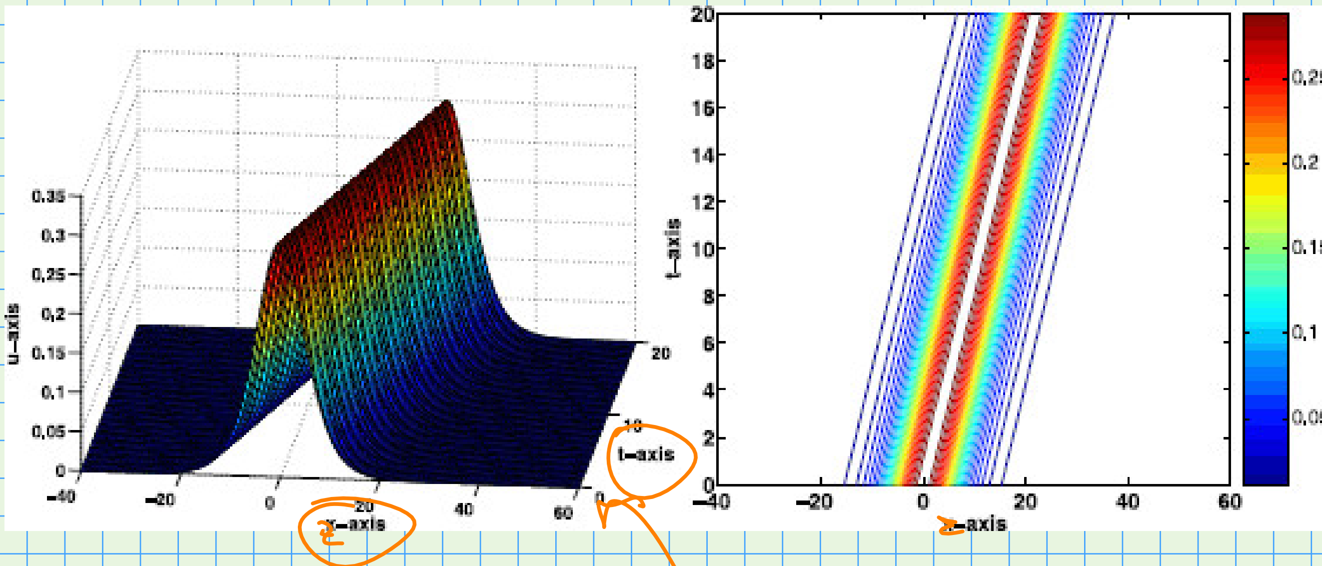
ONDE ELETTROMAGNETICHE nel vuoto

def onda : è una variazione (di densità, di pressione, di campo elettrico e mag) in un mezzo continuo che si propaga circa con la stessa forma a vel costante

cioè l'onda è descritta da una funzione che ha la stessa dip rispetto al tempo e allo spazio

$$f(z,t) = f(z - vt)$$





$f(z - vt) = f(z,t)$

velocità di propagazione

$f = e^{-(z-vt)^2}$ ← gaussiana

$f = \sin(z - vt)$

$f = e^{i(z-vt)}$

Equazione d'onda: eq differ che ha come soluzione l'onda

$$\boxed{\Box f = 0} \qquad \Box \overset{def}{=} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$\frac{1}{dist^2}$ — dim $\frac{1}{dist^2}$

$$\left(\Box \overset{def}{=} \nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$$

$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$ — c velocità della luce

Soluzione $\boxed{f = f(z - vt)}$

$$u \overset{def}{=} z - vt \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\overbrace{\frac{\partial u}{\partial z}}^{1} = \frac{\partial f}{\partial u} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{=-v} = -v\frac{\partial f}{\partial u} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \iff \Box f = 0$$

eq d'onda contiene $v^2 \Rightarrow g = g(z+vt)$ è

soluz : $\boxed{f(z-vt) \text{ e } g(z+vt) \text{ sono soluzioni}}$ ↳ $\Box f = 0$, $\Box g = 0$

$\exists$ la soluzione generale $\Box h = 0$

è combinaz lineare (Dalambertiano lineare) delle soluz

$$\boxed{h = f(z-vt) + g(z+vt)}$$

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ $\qquad \forall \vec{v}$: $\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{v} &= \vec{c} \\ \vec{\nabla}\times\vec{v} &= \vec{d} \end{aligned}}$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}}$

ONDE PIANE : usiamo la linearità dell'eq d'onda per lavorare con una famiglia semplice di fn.

$$f(z,t) = \sum_n F_n \, b_n(z,t)$$

F_n ← coefficienti di f sulla base b_n

b_n: base di funzioni che soddisfano eq d'onda

f: generica soluz eq d'onda

fn $\rightarrow$ spazio vettoriale con base b_k

se $\Box\, b_k = 0 \Rightarrow \Box\, f = 0$

linearità

Base di onde piane o esponenziali immaginari

$$b_k(z,t) \stackrel{def}{=} e^{ik(z-vt)} \stackrel{def}{=} e^{i(kz-\omega t)} \leftarrow \text{caso 3D}$$

$$\boxed{\omega \stackrel{def}{=} kv}$$

Ogni fn f soluz $\boxed{\Box f = 0}$ si può scrivere

$$f(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, F(k)\, e^{i(kz-\omega_k t)} \leftarrow \text{Trasformata di Fourier di } f(z,t)$$

$F(k)$

fn di 2 variabili

fn 1 variabile

perché $f(z,t) = f(\underbrace{z - vt})$ ← è soluz eq d'onda

nomenclatura

$k \stackrel{def}{=}$ numero d'onda $\rightarrow$ vettore d'onda

$\omega \stackrel{def}{=}$ frequenza angolare $\rightarrow$ n di radianti al secondo $\quad \omega = \frac{2\pi}{T}$

$T \stackrel{def}{=}$ PERIODO $\stackrel{def}{=} \frac{2\pi}{\omega}$ $\qquad e^{i(kz-\omega t)} = e^{i[kz-\omega(t+T)]}$

$\lambda \stackrel{def}{=}$ LUNGHEZZA D'ONDA $\stackrel{def}{=} \frac{2\pi}{k}$ $\qquad e^{i(kz-\omega t)} = e^{i(k(z+\lambda)-\omega t)}$

FREQUENZA : n. di oscillazioni al secondo

$\nu \stackrel{def}{=} \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ $\qquad \omega = kv$ $\qquad \boxed{\lambda \nu = v}$

ESTENSIONE 3D

EQ D'ONDA $\quad \Box f(\vec{r},t) = 0$

$\Box = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

ONDE PIANE $\quad \underbrace{b_{\vec{k}}(\vec{r},t) \overset{def}{=} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{v}t)} = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}}$

$\omega \overset{def}{=} \vec{v}\cdot\vec{k} = \pm v|\vec{k}|$

vedremo l'onda si propaga in direz $\vec{k}$

$\vec{k} \rightarrow$ vettore d'onda $\quad \lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$

Trasf di Fourier 3D

trasf di Fourier

$f(\vec{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \, F(\vec{k}) \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}$

soluz di eq d'onda

4 parametri reali

3 parametri reali

vincolo: f è soluz eq d'onda

$f(\vec{r},t) = f(\vec{r}-\vec{v}t)$

ONDE PIANE : proprietà

① nome : le superfici a fase cost φ $\quad e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = e^{i\varphi}$

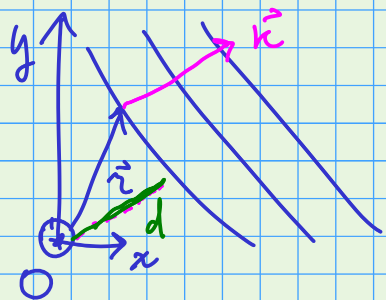
sono dei piani : $\boxed{\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = \varphi}$

eq di un piano $\perp$ a $\vec{k}$

$\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0) = 0 \leftarrow$ identifica tutti $\vec{r}$

$\vec{k}\cdot\vec{r} = \text{costante}$ $\qquad \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t$ sono dei piani

② $\vec{k}$ è la direz di propagaz dell'onda



distanza dall'origine
proiettare $\vec{r}$ lungo direz $\vec{k}$

$$d = \vec{r}\cdot\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \frac{\varphi + \omega t}{|\vec{k}|} = \alpha + \beta t$$

$$\vec{r}\cdot\vec{k} - \omega t = \varphi$$

$$= \text{cost} + \underset{\overset{\parallel}{\frac{\omega}{|\vec{k}|}}}{v}\, t$$

i piani propagano in direz $\vec{k}$ a vel v

f reale ma $F(k) \in \mathbb{C}$ $\qquad \underset{\in \mathbb{R}}{f}(r,t) = \int d^3k\, \underset{\in \mathbb{C}}{F(\vec{k})}\, \underbrace{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}}_{\in \mathbb{C}}$

$$\boxed{f \text{ è reale} \iff F(\vec{k}) = F^*(-\vec{k})}$$

$$f(r,t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3k\, F(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = \int_{\mathbb{R}^3_+} + \int_{\mathbb{R}^3_-}$$

semispazio $k_z > 0$

$k_z \leq 0$