FISICA 2 18/11/20

EQ MAXW in ELDIN

$$\boxed{\vec\nabla\cdot\vec E = \rho/\varepsilon_0 \qquad \vec\nabla\times\vec E = -\frac{\partial \vec B}{\partial t} \qquad \vec\nabla\cdot\vec B = 0 \qquad \vec\nabla\times\vec B = \mu_0\vec j + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec E}{\partial t}}$$

Forma integrale $\longrightarrow$ $\vec\nabla\cdot \to$ t. gauss

$\vec\nabla\times \to$ t. stokes

integro $\int_V d^3r$ ambo i m + t. Gauss

1°: $\int_S d^2r\, \hat n\cdot\vec E = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{racchiusa}$ $\forall S$ chiusa

carica totale dentro S

integro ambi m $\int_S d^2r\, \hat n\cdot$ + stokes

2°: $\int_{C=\partial S} d\vec r\cdot\vec E = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S d^2r\, \hat n\cdot\vec B$ $\forall C$ chiuso e $\forall S$ t.c. $C=\partial S$

3° $\int_S d^2r\, \hat n\cdot\vec B = 0$ $\forall S$ chiusa

4° $\int_{C=\partial S} d\vec r\cdot\vec B = \mu_0 \underbrace{I_{racchiusa}} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\int_S d^2r\, \hat n\cdot\vec E$ $\forall C$ chiuso $\forall S$ t.c. $C=\partial S$

corrente che buca la sup S

EQ MAXW in ELD in presenza di materiali (in termini della polarizzaz $\vec P$ e della magnetizzaz $\vec M$)

sono più semplici da usare se abbiamo dei modelli per $\vec P$ e $\vec M$ che non richiedano la conoscenza dei dipoli elettrici microsc e delle correnti microsc

spostamento $\vec D \overset{def}{=} \varepsilon_0\vec E + \vec P$ $\Rightarrow$ $\vec E = \frac{\vec D - \vec P}{\varepsilon_0}$

vettore H $\vec H \overset{def}{=} \frac{\vec B}{\mu_0} - \vec M$ $\qquad \vec B = \mu_0(\vec H + \vec M)$

$1°$ $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_f}$ ← densità di cariche libere

statico

$\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{E}=0 \iff \vec{\nabla}\times\vec{D} = \vec{\nabla}\times\vec{P}}$

$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}} \iff \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{D} = +\vec{\nabla}\times\vec{P} - \frac{\partial \varepsilon_0\mu_0(\vec{H}+\vec{M})}{\partial t}}$ $2°$

$3°$ $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0} \rightarrow \underline{\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{M}}$

$4°$ $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow$

$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j}_f$ ← caso statico : uso stesso ragionamento per ricavare $4°$ eq Maxw

$4° \rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}}$

↳ corrente libera (dovuta al moto delle cariche libere) escluso cariche polarizz e correnti dovute ai dipoli microscopici

POTENZIALI elmag

→ SEMPLIFICAZIONE delle eq Maxw

<u>pot vettore</u> $\vec{A}$: def $\boxed{\vec{B} \overset{def}{=} \vec{\nabla}\times\vec{A}}$ vale anche in eld

in modo t.c. $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ la $3°$ eq Maxw è automaticam soddisfatta

↳ div rot $=0$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$

<u>pot scalare</u> : in els $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0 \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}V}$ → in elSTATICA rot grad $=0$

$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}V = 0$ automaticam non va più bene in eldinamica $\longrightarrow$ $\vec\nabla\times\vec E = -\frac{\partial \vec B}{\partial t} = -\frac{\partial\, \vec\nabla\times\vec A}{\partial t}$

$= -\vec\nabla\times\frac{\partial\vec A}{\partial t}$

$$\Longleftrightarrow \quad \vec\nabla\times\Big(\overbrace{\vec E + \frac{\partial \vec A}{\partial t}}^{-\vec\nabla V}\Big) = 0$$

2° eq Maxw

è automaticam soddisfatta se scelgo V t.c.

$\hookrightarrow$ rot grad $= 0$

$$\vec E + \frac{\partial \vec A}{\partial t} = -\vec\nabla V$$

def dei pot in eld

$$\boxed{\begin{aligned} \vec B &\overset{def}{=} \vec\nabla\times\vec A \\ \vec E &\overset{def}{=} -\vec\nabla V - \frac{\partial \vec A}{\partial t}\end{aligned}}$$

i pot $\boxed{\text{non}}$ sono univocamente determinati: $\rightarrow$ c'è libertà di scelta nei potenziali $\rightarrow$ libertà di Gauge

eq di Maxw in termini dei potenziali: 2 delle 4 eq sono automaticam soddisfatte   2°, 3° eq Max $\rightarrow$ via

1° $\quad \vec\nabla\cdot\vec E = \rho/\varepsilon_0 \Longleftrightarrow \vec\nabla\cdot\left(-\vec\nabla V - \frac{\partial\vec A}{\partial t}\right) = \rho/\varepsilon_0$

$$\boxed{-\nabla^2 V - \frac{\partial}{\partial t}\,\vec\nabla\cdot\vec A = \rho/\varepsilon_0}$$

4° $\quad \vec\nabla\times\vec B = \mu_0\vec j + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec E}{\partial t} \Longleftrightarrow \vec\nabla\times\vec\nabla\times\vec A = \mu_0\vec j + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec\nabla V - \frac{\partial\vec A}{\partial t}\right)$

rot rot = grad div − laplaciano

$$\vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A) - \nabla^2\vec A = \mu_0\vec j - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec\nabla V - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec A}{\partial t^2}$$

$$\underbrace{\nabla^2\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}}_{\square\vec{A}} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0\vec{j}$$

$$\square \overset{def}{=} \nabla^2 - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$ ← Dalambertiano o quadratello

in notazione relativistica è un laplaciano 4-dim

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1^\circ & \nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\rho/\varepsilon_0 \\ 4^\circ & \square\vec{A} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0\vec{j} \end{array}}$$

2 eq differenziali di SECONDO ordine

ancora ACCOPPIATE: entrambe contengono V e $\vec{A}$

ULTERIORE SEMPLIFICAZ → disaccoppiamo usando la libertà di Gauge: cambio i potenziali senza cambiare i campi in modo da semplificare

Libertà di Gauge: rot grad = 0 ⇒ $\vec{B}$ non cambia

se aggiungo ad a il grad di un campo scalare Λ arbitrario $\vec{A}$ e $\vec{A}+\vec{\nabla}\Lambda$ danno lo stesso $\vec{B}$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{\nabla}\Lambda) = \vec{\nabla}\times\vec{A} + \cancel{\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\Lambda}$$
$$\cancel{\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\Lambda} = 0$$

aggiungendo $\vec{\nabla}\Lambda$ cambia $\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ a meno che $V \to V - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\left(V - \cancel{\frac{\partial \Lambda}{\partial t}}\right) - \frac{\partial(\vec{A} + \cancel{\vec{\nabla}\Lambda})}{\partial t}$$

Trasformazioni di gauge: cambiano i potenziali, ma lasciano i campi $\vec{E}, \vec{B}$ invariati

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{A} &\xrightarrow{G} \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \\ V &\xrightarrow{G} V' = V - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \end{aligned}}$$

① Gauge di Coulomb (già visto in magnetost)

scelgo Λ t.c. $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \overset{\text{imp}}{=} 0$

scelgo Λ t.c. $\nabla^2 \Lambda = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}'$ $\Rightarrow$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \nabla^2\Lambda$ $\Leftrightarrow$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2 V + \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}} = -\rho/\varepsilon_0 \\ &\Box \vec{A} - \vec{\nabla}\left(\cancel{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0 \vec{j} \end{aligned}}$$

← in gauge Coulomb sono $\boxed{\text{disaccoppiate}}$

la prima è indip da $\vec{A}$ ed è eq di Poisson. Si risolve la 1° (metodo fn di Green) e sostituito il risult nella seconda

nel vuoto $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$ $\quad \nabla^2 V = 0 \quad V = 0$

$\Box \vec{A} = 0$ ← $\boxed{\text{eq d'onda}}$ per pot vettore $\quad \vec{A} = 0$

anche altre soluz

② Gauge di LORENTZ

gauge di Coulomb non è relativisticam invariante: la condiz $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ DIPENDE dal sist di riferimento

$$\Lambda \qquad \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}}_{\Uparrow} \stackrel{\text{IMP}}{=} 0$$

scelgo Λ t.c.

$$\hookrightarrow \quad \underbrace{\Box \Lambda = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial V'}{\partial t}}$$

$$\underbrace{\cancel{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial V'}{\partial t}}} = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{A} + \nabla\Lambda\right) + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(V - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right)$$

$$= \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \underbrace{\nabla^2\Lambda + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial V}{\partial t} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2}}_{=\Box\Lambda} = \underbrace{\cancel{\Box\Lambda} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial V}{\partial t}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial V}{\partial t} = 0} \rightarrow -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ &\Box\vec{A} - \vec{\nabla}\underbrace{\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial V}{\partial t}\right)}_{=0} = -\mu_0\vec{j} \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 V - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Box V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ &\Box\vec{A} = -\mu_0\vec{j} \end{aligned}}$$

Sono disaccoppiate

sarà punto di partenza per scrivere elettrodinamica relativistica

POTENZIALI semplificano eq Max

8 eq scalari del primo ordine accoppiate con 6 incognite $(E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z)$

$\downarrow$

4 eq scalari al secondo ordine DISACCOPPIATE con 4 incognite (V, A_x, A_y, A_z) dai potenziali ottenete

i campi: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ $\quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

CONSERVAZIONE ENERGIA e MOMENTO in ED

↳ teoremi di Poynting

ENERGIA: energia campo elm nel volume V si può scrivere

$$\underbrace{W_V = \frac{1}{2} \int_V d^3 r \; \varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}}$$

Lavoro del campo elm su una carica q $dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} =$

$\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$

$$= q\vec{E} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} dt + \cancel{q(\underbrace{\vec{v} \times \vec{B}}_{\perp a \vec{v}}) \cdot \vec{v}\, dt}$$

vel nel punto $\vec{r}$

per densità di cariche ρ $\quad dW = \rho \vec{E} \cdot \vec{v}\, dt$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dt} = \int_V d^3 r \; \vec{E} \cdot \vec{j} = \int_V d^3 r \; \vec{E} \cdot \left(\frac{\vec{\nabla} \times \vec{B}}{\mu_0} - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\mu_0} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) =$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$= \int_V d^3 r \left(\frac{\vec{B} \cdot (\overbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E}}^{= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}})}{\mu_0} - \frac{\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})}{\mu_0} - \varepsilon_0 \cancel{\mu_0} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) =$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

deriva z prodotto

$$= \int_V d^3 r \left(-\frac{1}{\mu_0} \underbrace{\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} - \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) - \int_{S = \partial V} d^2 r \; \vec{n} \cdot \frac{(\vec{E} \times \vec{B})}{\mu_0}$$

derivaz prod

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} B^2 = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_V d^3r \left(\frac{B^2}{\mu_0} + \varepsilon_0 E^2\right) - \int_{S=\partial V} d^2r\, \vec{n}\cdot\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} = \frac{dW}{dt}}_{\text{t di Poynting}}$$

variaz nel tempo dell'energia nel vol V + il flusso di energia attraverso il bordo del volume = variazione totale di energia

$$\Rightarrow \underbrace{\int_V d^3r\, \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0}{2}E^2}$$ = en in V del campo elm

$\boxed{\vec{S} \overset{def}{=} \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}}$ def vettore di Poynting : il flusso di $\vec{S}$ rappresenta il flusso di en attraverso una sup

vedremo onde elm: il flusso di en trasportato da un'onda è il flusso del vett di Poynting

$\vec{S}$ → en trasportata dal campo per unità di tempo e per unità di sup

t. di Poynting come eq di continuità → conservaz energia la conservaz si può scrivere come eq di continuità (→ esempio conservaz carica $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$)

$W \overset{def}{=} \int_V d^3r\, u_m$

↳ densità di energia totale

t. di Poynting $\displaystyle \frac{dW}{dt} = \int_V d^3r \, \frac{dU_m}{dt} \underset{\text{t. Poynting}}{=} \int_V d^3r \left(-\vec{\nabla}\cdot\vec{S} - \frac{\partial u_{em}}{\partial t} \right)$

$$u_{em} \overset{def}{=} \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

vale $\forall V$

$$\int_V d^3r \left[\frac{d}{dt} \left(U_m + U_{em} \right) + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} \right] = 0$$

$= 0$

eq conservaz scritta come eq continuità

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(u_m + u_{em} \right) + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0}$$