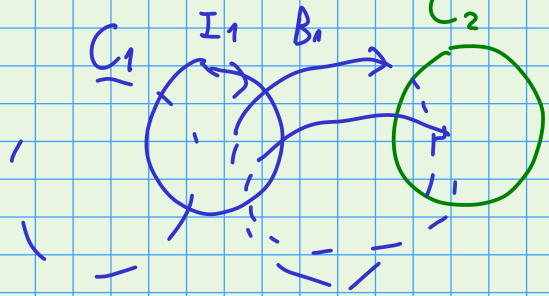
FISICA 2 17/11/20

INDUTTANZA

mutua induzione



il campo $\vec{B}_1$ prodotto da C_1 crea un flusso di campo attraverso C_2

$\vec{B}_1$ è $\propto$ a I_1 $\Rightarrow$ anche il flusso f_2 attraverso $C_2 \propto I_1$

flusso di $\vec{B}_1$ attraverso circuito C_2

$$f_2 \overset{def}{=} M_{21} I_1$$

coeffic di $\boxed{\text{mutua induzione}}$

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = M_{12}$$

formula è simmetrica per scambio di $1 \leftrightarrows 2$

B.S.

$$\vec{B}_1(\vec{r}) \overset{B.S.}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{C_1} d\vec{r}_1 \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}$$

def flusso

$$f_2 \overset{\text{def flusso}}{=} \int_S d^2 r_2\, \vec{n} \cdot \vec{B}_1(\vec{r}_2) = \int_S d^2 r_2\, \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A}_1(\vec{r}_2) =$$

S t.c. $C_2 = \partial S$ $\qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

sezione del filo C_1

$$= \int_S d^2\vec{r}_2\, \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \times \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_1} d\vec{r}' \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}'|} \right) \qquad \vec{I} = \vec{j}\, da_\perp \,, \quad d^3 r' = da_\perp dr'$$

costante

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} dr' \frac{\vec{I}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_1} d\vec{r}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

corrente passa solo nel circuito C_1

$\vec{I} \parallel d\vec{r}$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S d^2 r_2\, \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \times \left(\int_{C_1} d\vec{r}' \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}'|} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_2} d\vec{r}_2 \cdot \int_{C_1} d\vec{r}' \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}'|}$$

sup t.c. $\partial S = C_2$ $\qquad$ Stokes

$$\Phi_2 = I M_{21}$$

fem indotta sul circuito 2 da una variazione di corrente I_1

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt} - I_1\frac{dM}{dt}$$

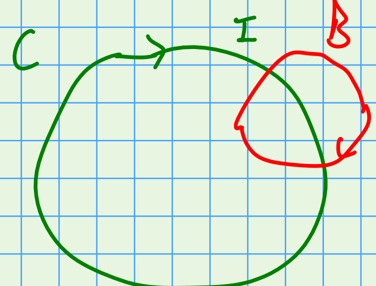
induz di Faraday

M costante → dipende dalla geometria circuito

(vedremo: il trasformatore → oggetto che trasforma una ddp in un'altra)

INDUTTANZA: ho mutua induzione di una spira su se stessa

variaz di corrente I in una spira genera una fem (opposta per legge Lentz) nella spira stessa



$$\Phi_1 = \int_S d^2 r\, \vec{n}\cdot\vec{B} \stackrel{\text{Biot Savart}}{=} \underbrace{\frac{I\mu_0}{4\pi}\int_S d^2 r\, \vec{n}\cdot\oint_{C_1} d\vec{r}\,' \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}}_{\stackrel{def}{=} L}$$

flusso attraverso S_1 che chiude C_1

$$\stackrel{def}{=} L I$$

def L induttanza (o auto-induzione)

unità di misura Henry $= \dfrac{\text{Volt}\cdot\text{secondo}}{\text{Ampere}}$

variaz di corrente attraverso circuito genera una fem opposta nel circuito stesso

$$\text{fem} = \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

induz di Faraday

suppongo L costante

ENERGIA campo MAGNETOSTATICO

campo magnetico non produce lavoro $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ $\quad d\vec{r} \parallel \vec{v} \perp \vec{B}$, $\perp \vec{F}$

$\Rightarrow$ sembrerebbe che energia campo mag $= 0$? $\rightarrow$ NO!

è vero che campo statico non compie lavoro ma creare un campo mag dal nullo, ho una variaz (nel tempo) di $\vec{B}$ $\Rightarrow$ campo el indotto $\Rightarrow$ posso compiere lavoro

legge di induzione

$\hookrightarrow$ ELETTROMOTORE

energia immagazzinata dal campo finale = all'energia richiesta per crearlo da zero

conservaz energia

$$W_{tot} = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \; B^2$$

potenza di un circuito $\rightarrow$ $\frac{dW}{dt} = VI$ = lavoro compiuto dal circuito per unità di t

W

compiuto SUL circuito $\quad \frac{dW}{dt} = - VI = L I \frac{dI}{dt}$

ddp, corrente

$V = fem = -L \frac{dI}{dt}$

$$\underline{W} = \int_0^{T_{finale}} dt \, \frac{dW}{dt} = \int_0^{T_{finale}} dt \, L I \frac{dI}{dt} = L \int_0^{I_{finale}} dI \; I =$$

$$= L \frac{I_{final}^2}{2}$$

$\Rightarrow$ induttanza (bobina, solenoide) è uno strumento che immagazzina energia sotto forma di campo magnetico

$$\int_S d^2r \; \vec{n} \cdot \vec{B} = L I$$

$$W = \frac{I}{2}\int_S d^2r\, \vec{n}\cdot\vec{B} \underset{\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}}{=} \frac{I}{2}\int_S d^2r\, \vec{n}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} \underset{\text{t. Stokes}}{=} \frac{I}{2}\int_{C'=\partial S} d\vec{r}\cdot\vec{A} =$$

$$\underset{I=|\vec{j}|\,da_\perp}{=} \frac{1}{2}\int_{C'} d\vec{r}\, da_\perp\, |\vec{j}|\cdot\vec{A} \underset{\vec{j}=0 \text{ fuori dal circuito}}{=} \frac{1}{2}\int_V \underbrace{dr\,da_\perp}_{d^3r}\, \vec{j}\cdot\vec{A} \underset{\text{4° eq Maxw magnet}}{=}$$

$da_\perp$ sez filo

$\vec{j}=0$ fuori dal circuito

$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}$

1° magnetost → perché ci interessa il caso di $\vec{B}$ finale: stazionario

$$= \frac{1}{2}\int_V d^3r\, \underbrace{\left(\frac{\vec{\nabla}\times\vec{B}}{\mu_0}\right)}_{\vec{j}}\cdot\vec{A} = \frac{1}{2\mu_0}\int_V d^3r\left[\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{A}\right) + \vec{B}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A}\right] =$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{b}$$

derivaz del prodotto

$\vec{b}=\vec{A} \quad \vec{a}=\vec{B}$

t. di Gauss

$$\overset{\text{t. di Gauss}}{=} \frac{1}{2\mu_0}\int_{S=\partial V} d^2r\, \vec{n}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{A}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\mu_0}\int_V d^3r\, \underbrace{\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A}}_{B^2} \underset{V\to\mathbb{R}^3}{=} \frac{1}{2\mu_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r\, B^2 + \frac{1}{2\mu_0}\int_{S\to\infty} d^2r\, \vec{n}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{A}\right) \to 0$$

$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}$

V = sfera di raggio R

$R\to\infty$

$\Rightarrow V\to\mathbb{R}^3$

$$\int_S d^2r \to R^2 \qquad A \to \frac{1}{R}$$

$$B \to \frac{1}{R^2}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r\, B^2}$$

analogo elst → $W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r\, E^2$

EQ MAXWELL in EL DINAMICA

↳ postulati ⟺ principi fisici $\overset{\text{induzione}}{\Leftarrow}$ esperimenti
⇓
teoria: elettromagnetismo si ricava come teoremi dalle eq Maxw

principi fisici:

① Forza di Lorentz → definizione di $\vec{E}, \vec{B}$ dalla forza su carica di prova q $\quad \vec{F} \overset{def}{=} q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

② cariche elettriche sono le uniche sorgenti del campo el (legge di Coulomb) ⟺ $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$ ← densità di carica (vale anche in eldinamica)

↑ t. di Gauss

③ non esistono sorgenti di campo $\vec{B}$ (no cariche magnetiche)

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (vale anche in eldin)

④ legge di induz di Faraday ← per induzione (logica) dagli esperim di Faraday

$$\text{fem} \overset{def}{=} \int_{C = \partial S} d\vec{r} \cdot \vec{E} = -\frac{d}{dt} \int_S d\Sigma\, \vec{n} \cdot \vec{B}$$

↑ chiuso

finora abbiamo considerato C con spire $\xrightarrow{\text{induzione logica}}$ vale la stessa legge anche se C è un circuito astratto (senza conduttori)

⑤ Legge di continuità della carica ≡ non posso creare o distruggere cariche elettrica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

← la variaz di carica è data solo dalla corrente

⑥ legge di OERSTEDT (o 4° eq Maxw per magnetost)

$\hookrightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

NON vale in el dinamica div rot = 0

$\Rightarrow$ div ambo i membri

continuità della carica

$$\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B}}_{=0} = \vec{\nabla}\cdot\mu_0\vec{j} = -\mu_0\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

statico

$\Rightarrow$ legge di Oers vale solo nel caso statico

⑦ PRIN di SOVRAPPOSIZ

① $\rightarrow$ def di $\vec{E},\vec{B}$

$\boxed{②-⑦ \iff \text{eq Maxw eldin}}$

② $\rightarrow$ 1° eq Maxw $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$

in els

③+⑤ $\iff$ 2° eq Maxw $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

$$\text{fem} = \int_{c=\partial S} d\vec{r}\cdot\vec{E} = -\frac{d}{dt}\int_S d^2r\,\vec{n}\cdot\vec{B}$$

Faraday

$\parallel$ t. stokes

$$\int_S d^2r\,\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{E}$$

stessa sup (viene da $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$)

$$\int_S d^2r\,\vec{n}\cdot\left(\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{d}{dt}\vec{B}}_{=0}\right) = 0 \quad \forall S \iff \text{integranda è nullo}$$

$\Rightarrow$ 2° eq Maxw

2° eq Maxw
3° eq Maxw $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ $\rightarrow$ ③

③ $\iff$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ t. gauss

② + ⑤ + ⑥ oerstedt $\Rightarrow$ 4° eq Maxw $\boxed{\vec\nabla \times \vec B = \mu_0 \vec j + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec E}{\partial t}}$

giustificaz a posteriori: vogliamo un'eq che contenga la ⑤ e che si riduca ⑥ in caso stazionario

$$\vec\nabla\cdot\left(\vec\nabla\times\vec B\right) = \vec\nabla\cdot\left(\mu_0\vec j + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec E}{\partial t}\right) = \mu_0\left(\vec\nabla\cdot\vec j + \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\vec\nabla\cdot\vec E}_{=\rho/\varepsilon_0\ (1^\circ \text{eq M})}\right)$$

$\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec B) = 0$

$$= \mu_0\left(\vec\nabla\cdot\vec j + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right)$$

se $\frac{\partial \vec E}{\partial t} = 0$ (caso staz)

$\Rightarrow$ legge oerstedt $\vec\nabla\times\vec B = \mu_0\vec j$

prin fisici $\Leftrightarrow$ eq Maxw

è un set di 4 eq differenzial. lineari al primo ordine

$\to$ prin sovrapp

eq diff ACCOPPIATE

le prime 2 contengono $\vec B$

le ultime 2 contengono $\vec E$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\vec\nabla\cdot\vec E = \rho/\varepsilon_0\\
&\vec\nabla\times\vec E = -\frac{\partial \vec B}{\partial t}\\
&\vec\nabla\cdot\vec B = 0\\
&\vec\nabla\times\vec B = \mu_0\vec j + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec E}{\partial t}
\end{aligned}}$$

assiomi

incognite $\left.\begin{matrix}\vec E(\vec r,t)\\ \vec B(\vec r,t)\end{matrix}\right\}$ 6 campi scalari

$E_x E_y E_z$

$B_x B_y B_z$

dati $\rho, \vec j$

prin sovrapp è nella linearità: somma di soluzioni è soluzione