

magnetizzazione: campo magnetico in presenza di materia

T di Stokes per prod vettore

$$\int_{C=\partial S} d\vec{r} f(\vec{r}) = - \int_S d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} f \times \vec{n}$$

t. Stokes  $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{c} f(\vec{r})$   $\vec{c}$  cost derprod

$$\int_{C=\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{c} f(\vec{r}) = \int_S d\vec{r} \cdot \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{r}) = - \int_S d\vec{r} \cdot \vec{n} \cdot (\vec{c} \times \vec{\nabla} f)$$

$$\vec{c} \cdot \int_C d\vec{r} f(\vec{r})$$

$$= - \int_S d\vec{r} \cdot \vec{c} \cdot (\vec{\nabla} f \times \vec{n})$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{c} f = \vec{\nabla} f \times \vec{c} + \cancel{f \vec{\nabla} \times \vec{c}} = \vec{c} \times \vec{\nabla} f$$

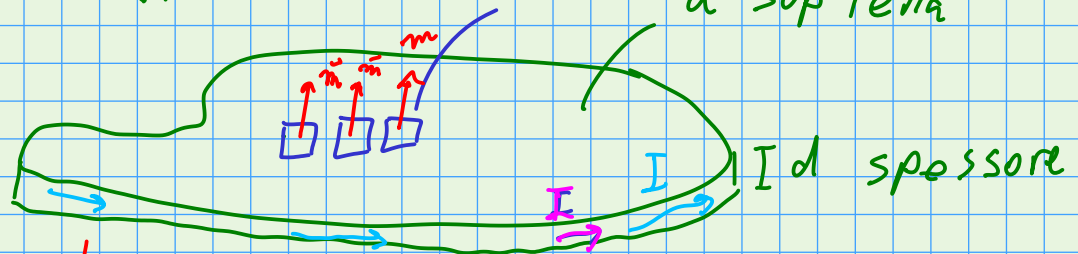
$$\forall \vec{c} \int_C d\vec{r} f(\vec{r}) = - \int_S d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} f \times \vec{c}$$

- ① CONTRIBUTO di VOL  $\vec{j}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M}$
- ② " " SUP  $\vec{K}_m(\vec{r}) = -\vec{n} \times \vec{M} = \vec{M} \times \vec{n}(\vec{r})$

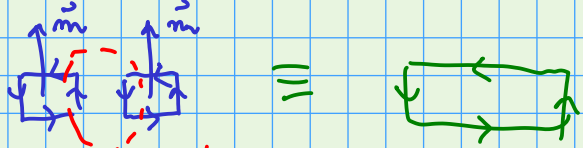
versore  $\perp$  sup in  $\vec{r}$

② giustificaz: magnetizz cost dentro il corpo  
 $\vec{\nabla} \times \vec{M} = 0$   
 circuiti correnti microscopiche a sup fetta

Fettina dell'oggetto



$\vec{M}$  unif  $\Rightarrow \vec{m}$  sono allineati e uguali:



cancelazione

tutti i circuitini interni si cancellano  $\Rightarrow$  equivalente a corrente lungo il bordo della fetta

def di magnetizz  $\vec{M}$  sup fetta

$$m = M V = M a d$$

$\uparrow$  volume fetta       $\uparrow$  spessore

momento di dipolo totale (della fetta)

$I = M d \Rightarrow$  densità di sup della corrente

$$m = I a$$

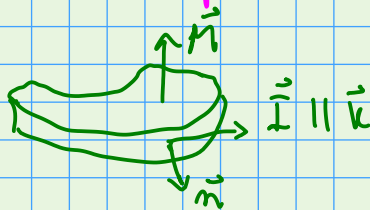
$\uparrow$  corrente circuito       $\uparrow$  sup

def nom dipolo magnetico

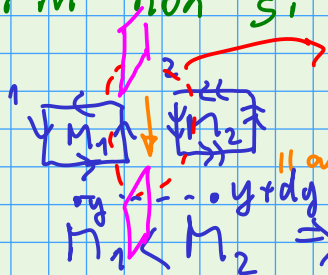
$$K_m = \frac{I}{d} = M$$

$\uparrow$  sezione nastro  $d_2 = d$

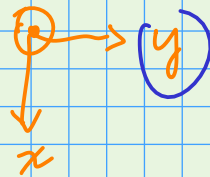
$$\vec{k}_m = \vec{M} \times \vec{n}$$



① termine di volume  $\Rightarrow \vec{M}$  non è costante  $\Rightarrow$  circuitini interni non si annullano più



non c'è cancellazione circuitini interna



scorrono in direz opposta

$$I_1 < I_2$$

$$I_x = I_2 - I_1 = dz (M_2 - M_1)$$

$\uparrow$  correnti circuitoz

$I = M d$   
 $\uparrow$  spessore della fetta  $d = dz$

$$= dz (M_2(y+dy) - M_1(y)) \approx dz dy \frac{\partial M_z}{\partial y} = I_x$$

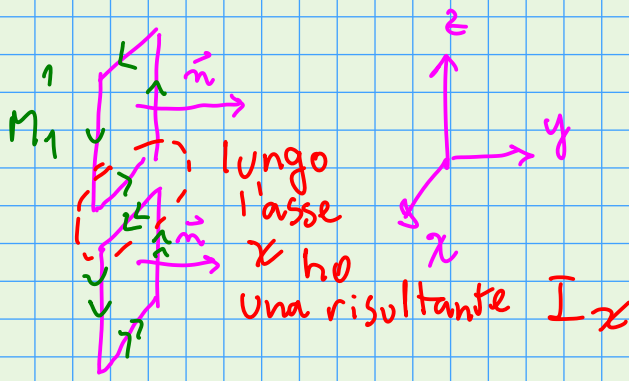
$\uparrow$  ss al 1° ordine di M

$$(\vec{j}_m)_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I_x}{dz dy} = \frac{\partial M_z}{\partial y}$$

$M(y+dy) \approx M(y) + dy \frac{\partial M}{\partial y}$   
 $\leftarrow$  contributo della comp z di  $\vec{M}$

$\uparrow$  el di sup  $\perp$  alla direz cariche (x)

se  $\vec{M}$  non è ll asse z  $\Rightarrow$  devo considerare anche le altre compon  $\rightarrow$  es la comp y



Stesso discorso di  $\vec{I} = \vec{M} \times \vec{n}$

$(\vec{j}_m)_x = -\frac{\partial M_y}{\partial z}$

il contributo totale alla  $(\vec{j}_m)_x$  è la somma dei due

$$(\vec{j}_m)_x^{TOT} = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} = (\vec{\nabla} \times \vec{M})_x$$

ripetere discorso  $(\vec{j}_m)_{y,z} \Rightarrow \vec{j}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M}$

• EQ di MAXWELL in presenza di mat magnetici

$$\vec{j}_{TOT} \stackrel{def}{=} \vec{j} = \vec{j}_m + \vec{j}_f$$

↑ densità di corrente per cariche libere

1° eq Maxwell magnetost  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 (\vec{j}_f + \vec{j}_m)$

$= \mu_0 (\vec{\nabla} \times \vec{M} + \vec{j}_f)$

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j}_f$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_f$$

1° eq Maxwell in presenza di materia

def Vettore H:  $\vec{H} \stackrel{def}{=} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$

"vettore campo magnetico"

$\vec{B}$  "vettore di induzione magno"  
nasconde le correnti di magnetizz dentro  $\vec{M}$

è equivalente a  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

è utile per approssimaz dove abbiamo un modello  $\vec{M}$

forma alternativa per 1° eq Maxwell (t. Stokes)

$$\int_C d\vec{l} \cdot \vec{H} = I_{\text{racchiuse libere}} \Leftrightarrow \int_C d\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0 I_{\text{TOTALI racchiuse}}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{\text{TOT}}$$

3° eq di Maxwell  $\rightarrow$  div

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f \end{cases}$$

div e rot di  $\vec{H} \Rightarrow \vec{H}$  è determinato  
condiz cont posto  $\vec{M}$   $\vec{j}_f$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

più utile se abbiamo modelli  
(approssimati) per  $\vec{M}$

T di Gauss x rotore

$$\int_V d^3r \nabla \times \vec{v}(\vec{r}) = \int_{S=\partial V} d^2r \vec{n} \times \vec{v}(\vec{r})$$

$$\vec{u}(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{v}(\vec{r}) \times \vec{c} \quad \vec{c} \text{ è costante} \quad \leftarrow \text{t. di Gauss per } \vec{u}$$

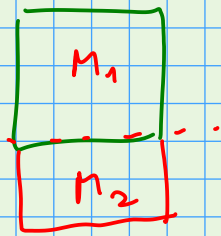
$$\int_V d^3r \nabla \cdot \vec{u} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{S=\partial V} d^2r \vec{n} \cdot \vec{u} = \int_S d^2r \vec{n} \cdot \vec{v} \times \vec{c} =$$

$$\int_V d^3r \nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot \int_V d^3r \nabla \times \vec{v} = \int_S d^2r \vec{c} \cdot \vec{n} \times \vec{v}$$

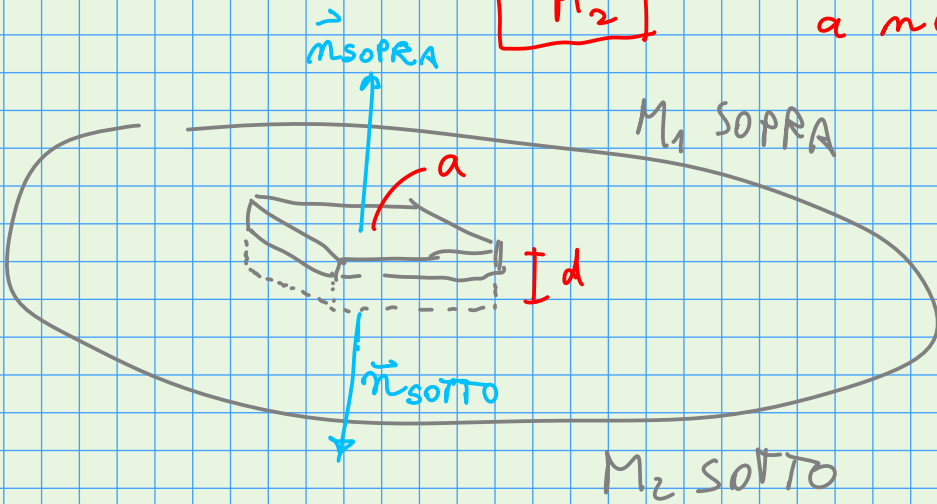
$$\vec{c} \cdot \nabla \times \vec{v} - \vec{v} \cdot \nabla \times \vec{c}$$

$\nabla \cdot \vec{c}$

# COMPORAMENTO di $\vec{B}$ e $\vec{H}$ sulle $SV$



uso t. Gauss su una scatola di fiammiferi; tagliata a metà dalla  $SV$



$$\int_S d^2 \vec{r} \cdot \vec{B} = a \vec{B} \cdot \vec{n}_{sopra} + d \vec{B} \cdot \vec{n}_{sotto} + \dots$$

t. Gauss  $\int d^3 r \nabla \cdot \vec{B} = 0$   $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

sup laterali  $\downarrow$  per  $d \rightarrow 0$

$$\vec{B}_{sopra} \cdot \vec{n}_{sopra} + \vec{B}_{sotto} \cdot \vec{n}_{sotto} = 0$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_{sopra} - \vec{B}_{sotto}) = 0$$

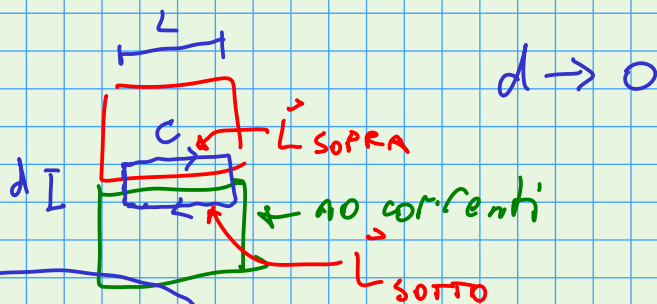
$\vec{n} = \vec{n}_{sopra} = -\vec{n}_{sotto}$

$$B_{sopra}^\perp = B_{sotto}^\perp$$

$$H_{sopra}^\perp + M_{sopra}^\perp = H_{sotto}^\perp + M_{sotto}^\perp$$

COMPON TANGENZIALI: utile  $\vec{H}$ : dipende da correnti libere

caso  $\vec{j}_F = 0$



t. Stokes  $\int_C d\vec{r} \cdot \vec{H} = I_{racchiuse} = 0$  Libere

$$L_{sopra} = -L_{sotto}$$

$$\vec{L} \cdot (\vec{H}_{sopra} - \vec{H}_{sotto}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H}''_{\text{SOPRA}} = H''_{\text{SOTTO}}}$$

• MATERIALI LINEARI, materiali dove  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$   
costante

$\chi_m \rightarrow$  suscettività magnetica

è un tensore se  $\vec{H}$  e  $\vec{M}$  non sono //

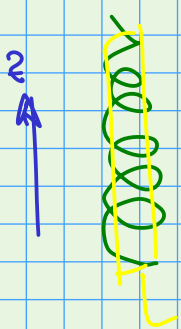
$$\vec{M} = \underbrace{\vec{\chi}_m}_{\text{righe} \times \text{colonne}} \cdot \vec{H}$$

def PERMEABILITÀ MAGNETICA  $\stackrel{\text{def}}{=} \mu$  t.c.

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \mu \vec{H}$$

nel vuoto  $\chi_m = 0 \Rightarrow \mu_0 = \mu$   $\mu_0 \leftarrow$  permeabilità mag del vuoto

ESEMPIO: solenoide pieno di materiale magnetico



Solenoide Vuoto:

$$\vec{B}_{\text{fuori}} = 0$$

spire per unità di lunghezza

$$\vec{B}_{\text{dentro}} = \mu_0 n I \vec{u}$$

$\vec{u}$  versore asse z

Solenoide Pieno: campo H dipende solo da

correnti libere  $\Rightarrow \vec{H} = n I \vec{u}$  corrente libera  
stesso conto materiale lin isotropo

$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H} \Rightarrow$  il campo  $\vec{B}$  è aumentato  
a parità di corrente

se  $\chi_m > 0$   $\mu > 1$

TRE TIPOLOGIE di materiali  $\left\{ \begin{array}{l} \text{dia magnetici} \\ \text{paramag} \\ \text{ferromag} \end{array} \right.$

① **DIAMAG**  $\rightarrow$  tutti i materiali (effetto schermato in  $\left\{ \begin{array}{l} \text{para} \\ \text{ferro} \end{array} \right.$ )

es acqua

$$\chi \sim -10^{-5}$$

$$\chi_m < 0$$

$\chi_m$  piccolo

$$\chi_m \sim 0$$

$\rightarrow$  materiali: atomi e molecole non hanno mom magnetico, ma quando messi in campo mag si creano correnti  $\left( \begin{array}{l} \rightarrow \text{vedremo} \\ \rightarrow \text{induzione} \end{array} \right)$    
  $\uparrow$    
 microscopiche

correnti indotte hanno verso opposto a quelle che inducono

$\Rightarrow$   $\rightarrow$  campo mag che si oppone al campo esterno

$\rightarrow$  diamag sono leggermente respinti dalle calamite

diamag  $\rightarrow$  e' indep dalla temperatura

② PARAMAG:  $\chi_m \geq 0 \Rightarrow$  materiale lineare

es: alluminio  $\chi \sim 10^{-5}$

$$\chi_m \sim 0$$

leggermente attratti da calamita

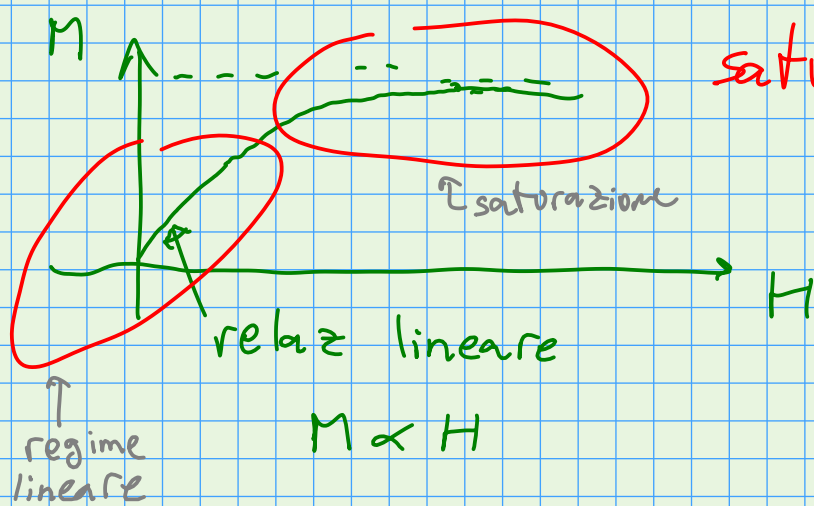
materiali con piccoli momenti di dipolo mag microscopico che non interagiscono fra loro: ogni molecola  $\sigma$

indip dalle altre

in presenza di campo esterno  $\rightarrow$  i momenti  
si allineano al campo  $\Rightarrow$  il campo magn generato  
dai dipoli microsc  $\propto$  il campo est  $\Rightarrow$   
sono attratt:

Dipende dalla temperatura  $\rightarrow$  agitazione  
termica tende a disallineare i momenti microscopici  
 $\Rightarrow$  paramag diminuisce con temperatura

Fenomeno della saturazione



saturazione

$\rightarrow$  quando i momenti  
microsc sono tutti  
allineati al campo  
esterno