FISICA 2, 5/11/20

SVILUPPO in MULTIPOLI

$$\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}''|} \underset{\text{1° ord}}{\simeq} \frac{1}{R} + \frac{\vec{r}''\cdot\vec{R}}{R^3} \qquad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C d\vec{r}''\,\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}''|} \simeq \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C d\vec{r}''\left[\frac{1}{R} + \frac{\vec{r}''\cdot\vec{R}}{R^3}\right] =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\cancel{\int_C d\vec{r}''} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\int d\vec{r}''\,\underbrace{(\vec{r}''\cdot\vec{R})}$$

circuito chiuso

$\overset{\shortparallel}{0}$ ← Monopolo = 0 → $\vec{R}$ non ha cariche

$$\int_C d\vec{r}''\,\underbrace{(\vec{r}''\cdot\vec{R})}_{f(\vec{r}'')} \overset{\text{def}}{=} \boxed{\int_C d\vec{r}''\, f(\vec{r}'') \overset{\text{dopo}}{=} -\int_S d^2r''\, \vec{\nabla} f \times \vec{n}}$$

sup che chiude C: $C = \partial S$

versore ⊥ alla sup infinit d^2r'' nella posiz $\vec{r}''$

$$= -\int_S d^2r''\, \vec{\nabla}_{\vec{r}''}(\vec{R}\cdot\vec{r}'')\times\vec{n} = -\int d^2r''\, \vec{R}\times\vec{n}$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}}(\vec{v}\cdot\vec{r}) = \vec{\nabla}(x v_x + y v_y + z v_z) = (v_x, v_y, v_z) = \vec{v}$$

$$= -\vec{R}\times\int_S d^2r''\,\vec{n} \overset{\text{def}}{=} -\vec{R}\times\vec{a} \qquad \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Se la sup è piana $\vec{a}$ è ⊥ alla sup

$|\vec{a}|$ è l'area di S

$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}(-\vec{R}\times\vec{a}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\,\vec{a}\times\vec{R} \overset{\text{def}}{=} \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{m}\times\vec{R}}{R^3}$$

$$= \boxed{\frac{\mu_0}{4\pi}\, \vec{m} \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} = \vec{A}(\vec{r})}$$

$$\vec{m} \stackrel{def}{=} I \vec{a} = I \int_S d^2r\, \vec{n}$$

momento di dipolo magnetico

del circuito C percorso da corrente I

nel caso generale:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V d^3r''\; \vec{r}'' \times \vec{j}(\vec{r}'')$$

$$\int_{C=\partial S} d\vec{r}\, f(\vec{r}) = -\int_S d^2r\; \vec{\nabla} f \times \vec{n}$$

uso t. di Stokes per campo vett $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{c} \cdot f(\vec{r})$ ← cost

$$\int_{C=\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{v}(\vec{r}) \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_S d^2r\; \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \int d^2r\, \vec{n} \cdot (-\vec{c} \times \vec{\nabla} f) =$$

$\vec{v} = \vec{c} f$ → ‖ $\boxed{\vec{c} \cdot \int_C d\vec{r}\, f(\vec{r})}$

$\vec{v} = \vec{c} f$

derivaz prod

$$\vec{\nabla} \times (\vec{c} f) \stackrel{!}{=} f(\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{c}}_{=0}) + (\vec{\nabla} f) \times \vec{c}$$

→ c cost

$$= -\int d^2r\; \vec{c} \cdot (\vec{\nabla} f \times \vec{n}) = -\vec{c} \cdot \int d^2r\, (\vec{\nabla} f) \times \vec{n} \quad \forall \vec{c} \Rightarrow$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

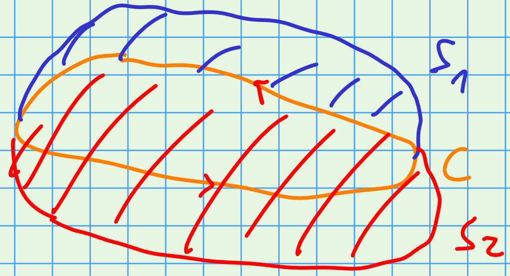
mom di dip m dipende dalla S?

$$\vec{m} \stackrel{def}{=} I \int_S d^2r\; \vec{n}$$

↳ NO dip solo dal circuito

$$\int_{S_1} d^2r\; \vec{n} = \int_{S_2} d^2r\; \vec{n}$$

se S_1 e S_2 hanno lo stesso bordo C



$\vec v$ cost

$$\int_{S_1} d^2r\, \vec n\cdot\vec v - \int_{S_2} d^2r\, \vec n\cdot\vec v =$$

serve perché vogliamo che $\vec n$ sia diretto verso l'esterno

$$= \int_{S_1\cup S_2 = \partial V} d^2r\, \vec n\cdot\vec v = \int_V d^3r\, \vec\nabla\cdot\vec v = 0$$

t. Gauss

$\vec v = \text{cost}$

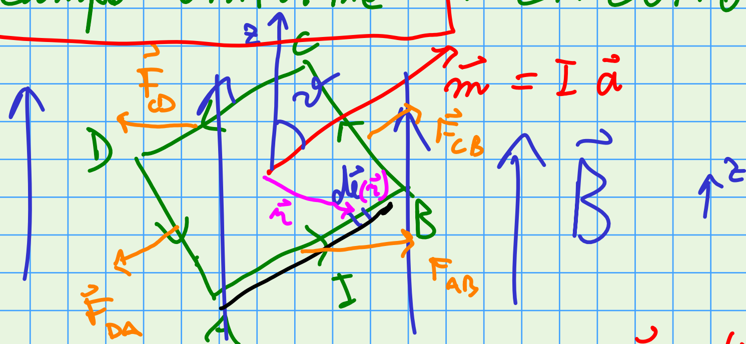
sup chiusa

$\forall \vec v$

$$\int_{S_1} d^2r\, \vec n\cdot\vec v = \int_{S_2} d^2r\, \vec n\cdot\vec v \qquad \forall \vec v \Rightarrow \int_{S_1} d^2r\, \vec n = \int_{S_2} d^2r\, \vec n$$

• SPIRE (circuiti chiusi) immersi in un campo magnetico

$\boxed{\text{① campo uniforme}}$ → circuito rettangolare



Forza che agisce sulla spira? → coppia di forze

(tende ad allineare $\vec m$ e $\vec B$)

$\vec F = q(\vec v\times\vec B)$

1° legge di Ampère: $d\vec F(\vec r) = \cancel{\frac{\mu_0}{4\pi}}\, I\, d\vec l(\vec r)\times\vec B(\vec r)$

$$\vec F(\vec r) = \cancel{\frac{\mu_0 I}{4\pi}}\oint_C d\vec l\times\vec B = \cancel{\frac{\mu_0 I}{4\pi}}\left(\vec L_{AB}\times\vec B + \vec L_{BC}\times\vec B + \vec L_{CD}\times\vec B + \vec L_{DA}\times\vec B\right)$$

$\vec B$ uniforme

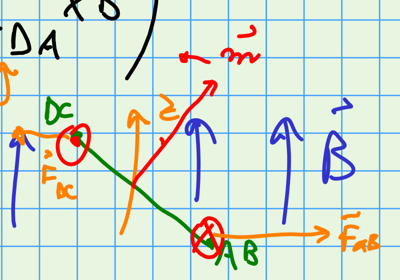
vettore ∥ al lato AB

tende a ruotare spira

$|L_{AB}|$ = lunghezza lato AB

Tende a deformare

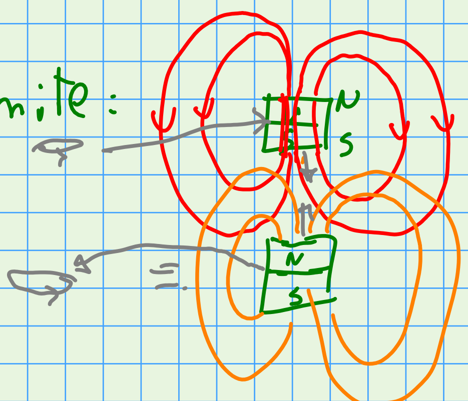
vista di lato



MOTORE ELETTRICO → spira in un campo mag
converte en elettrica (→ I) in rotazione
↳ quando $\vec{m}$ è allineato a $\vec{B}$ ⇒ inverto la
corrente (→ corrente alternata) ⇒ la coppia di
forze si ribalta e la rotazione continua

② campo non uniforme : → la spira tende a essere
attratta verso la direz. dove il campo è più intenso
(oppure prima ruota finchè $\vec{m}$ è ∥ $\vec{B}$ poi va verso $\vec{B}$ intenso)

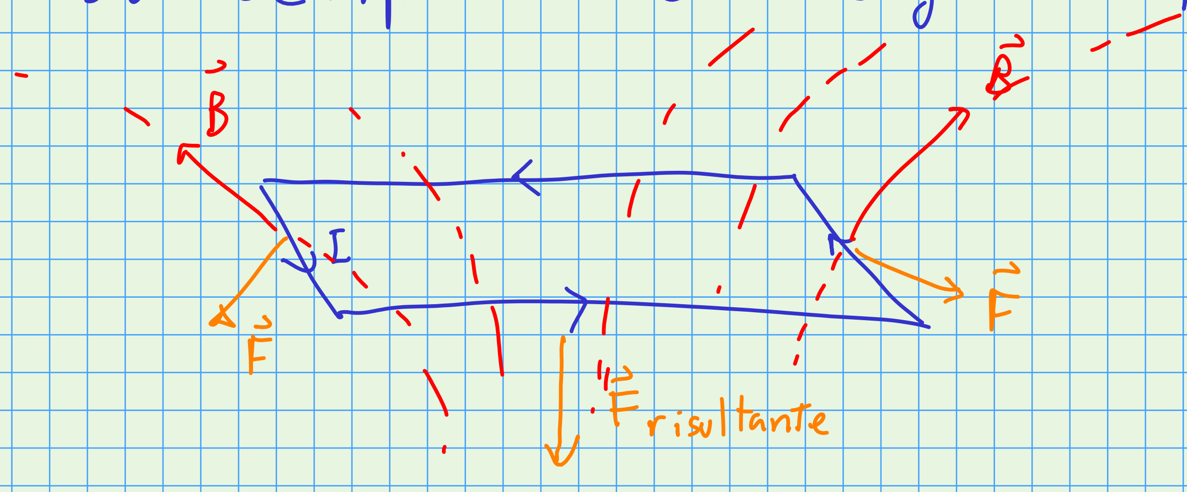
2 calamite :



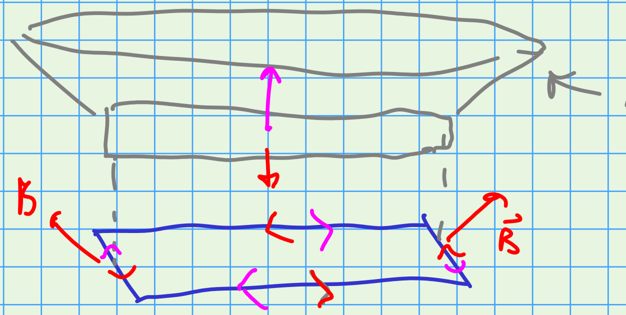
N → S fuori
il campo è intenso dove
le linee di campo sono
più fitte

Calamita → modellizzata come una spira nella
zona dove N, S

Caso semplice : $\vec{B}$ divergente spira rettang

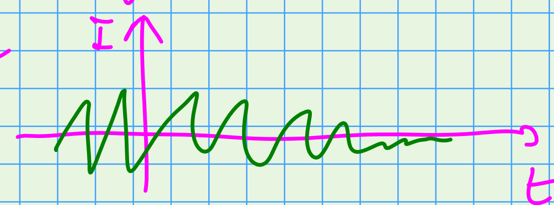


APPLICAZ: l'altoparlante:



se la corrente va in un verso la membrana si muove in una direz

altoparlante converte un segnale elettrico in oscillazioni meccaniche



MAGNETOST in Presenza di MATERIA

nei materiali ci sono dei momenti magnetici $\vec{m}$ microscopici

① correnti microscopiche

② momento magnetico di spin delle particelle

metafora sfera carica che ruota → equatore è una corrente

③ momento magnetico orbitale atomico o molecolare

metafora → elettrone ~~"ruota"~~ attorno all'atomo ⇒ corrente ⇒ momento di dip magnetico

NO!

↳ interagiscono con il campo esterno → effetti

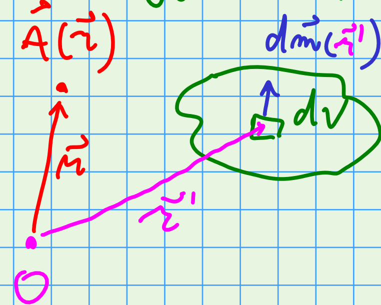
MAGNETIZZAZ: densità di dipoli magnetici

def $\quad \vec M(\vec r) \overset{def}{=} \dfrac{d\vec m(\vec r)}{dV(\vec r)}$ ← dipolo magnetico del volumetto dV nella posiz $\vec r$

Campo magnetico di un oggetto (→ materiale)

↓

pot vettore



$\vec r$ dove calcolo campo

$\vec r'$ posiz dV

in approx dipolo $\quad d\vec A(\vec r) = \dfrac{d\vec m(\vec r') \times (\vec r - \vec r')}{|\vec r - \vec r'|^3} \dfrac{\mu_0}{4\pi}$

prin sovrapposiz

$$\vec A(\vec r) = \int d\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d\vec m(\vec r') \times \frac{(\vec r - \vec r')}{|\vec r - \vec r'|^3} \overset{\downarrow}{=} \qquad \vec M = \frac{d\vec m}{dV} \quad dV = d^3 r'$$

V ← vol materiale

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3r' \, \vec M(\vec r') \times \frac{(\vec r - \vec r')}{|\vec r - \vec r'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3r' \, \vec M(\vec r') \times \vec\nabla_{\vec r'} \frac{1}{|\vec r - \vec r'|}$$

$$\vec\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec r}{r^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_V d^3r' \, \vec\nabla_{\vec r'} \times \left(\frac{-\vec M(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}\right) + \frac{1}{|\vec r - \vec r'|}\vec\nabla \times \vec M\right]$$

$$\vec\nabla \times (f\vec M) \underset{\text{deriv prodotto}}{=} (\vec\nabla f) \times \vec M + f\,\vec\nabla \times \vec M = -\vec M \times \vec\nabla f + f\,\vec\nabla \times \vec M$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\int_{S=\partial V} d^2r' \, \vec n \times \frac{-\vec M}{|\vec r - \vec r'|} + \int_V d^3r' \, \frac{1}{|\vec r - \vec r'|}\left(\vec\nabla \times \vec M\right)\right) = \vec A(\vec r)$$

t. Gauss per rotore $\quad \displaystyle\int_V d^3r' \, \vec\nabla \times \vec v \underset{\text{dopo}}{=} \int_{S=\partial V} d^2r \, \vec n \times \vec v$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$ ← vero se V contiene tutte le correnti all'interno

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S=\partial V} d^2r' \frac{\vec{k}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$\vec{k}$ = densità di sup di corrente

↖ va aggiunto se ci sono correnti sulla sup

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{j}_M &= \vec{\nabla} \times \vec{M} \\ \vec{K}_M &= -\vec{n} \times \vec{M} \end{aligned}}$$

← modo per descrivere le correnti interne usando la magnetizzaz

↑ versore ⊥ alla sup