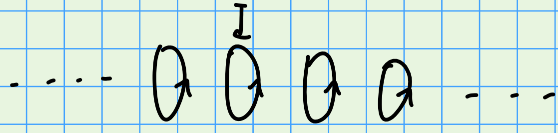
FISICA 2 5/11/20

CAMPO $\vec{B}$ SOLENOIDE



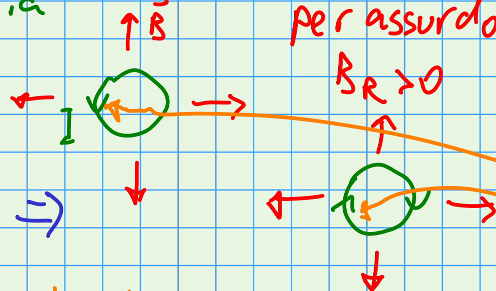
SIMMETRIA → cilindrica

coord cilindriche $\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$

$\vec{B} = (B_R, B_\varphi, B_z)$

① $B_R = 0$ per simmetria

guardando di taglio



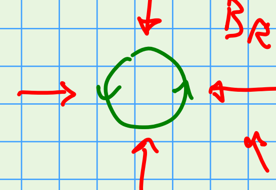
per assurdo $B_R > 0$

Rotazione (non riflessione)

ruotiamo di 180° ⇒

La rotazione è equivalente a invertire la corrente

⇒ per legge di BIOT - SAVART



$B_R < 0$

per inversione della corrente

|||

rotaz 180°

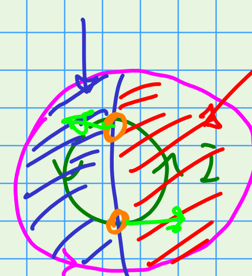
$\tilde{B}_R = -B_R \Rightarrow \boxed{B_R = 0}$

② $\boxed{B_\varphi = 0}$

guardo sezione del solenoide

Sup blu sopra

sup rossa sotto dischetto



C = circuito circolare attorno al solenoide

$$\oint_C d\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0 I_{racchiuse} = 0$$

no correnti racchiuse: ∀ sup se sup non interseca i dischetti

// circuito circolare

le correnti che bucano una ∀ sup che ha C come bordo

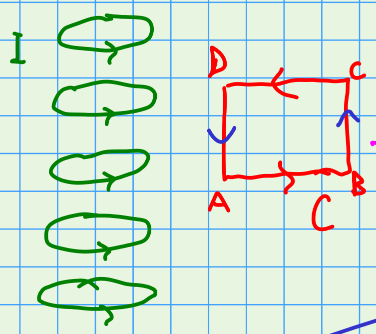
$$\oint_C d\vec{l} \cdot \vec{B} = \oint_C dl\, B_\varphi = 2\pi R_c\, B_\varphi$$

R_c raggio cerchio

B_φ è costante per simm di rotaz attorno all'asse cilindro

$\boxed{B_\varphi = 0}$

Componente B_z:



no correnti racchiuse

$$\oint_C d\vec{l}\cdot\vec{B} = \mu_0 I_{racchiuse} = 0$$

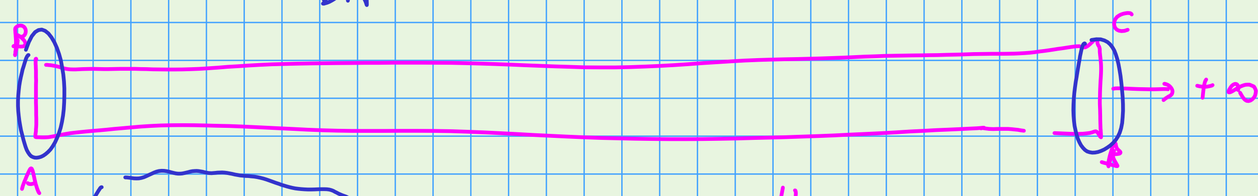
$$= \cancel{l_{AB} B_{AB}} + l_{BC} B_{BC} + \cancel{l_{CD} B_{CD}} + l_{DA} B_{DA} =$$

non ci sono comp radiali $B_R = 0$

$\Rightarrow B_{AB} = B_{CD} = 0$

$$= l\,(B_{BC} - B_{DA}) = 0 \Rightarrow B_{BC} = B_{DA}$$

$l_{BC} \overset{def}{=} l = -l_{DA}$



$B_{BC} \to 0$ perchè vado all'∞ $\Rightarrow B_{DA} = 0$

B_{BC} è ottenuto dalla B-S per ciascun anello

$\Rightarrow$ il contributo di ciascun anello decresce come $\frac{1}{r^2}$

ma ho infiniti anelli, lungo una retta

$\Rightarrow$ comunque il campo decresce ALMENO come $\frac{1}{r}$

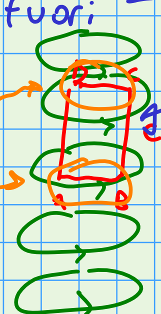
in realtà è meno

$\Rightarrow$ anche vicino al solenoide il campo mag esterno è 0

$$B_{DA} = 0,\quad B_\varphi = 0,\quad B_R = 0 \Rightarrow \vec{B}_{fuori} = 0$$

Campo interno? $\to$ è uniforme

$B_{AB} = B_{CD} = 0$ perchè $B_R = 0$

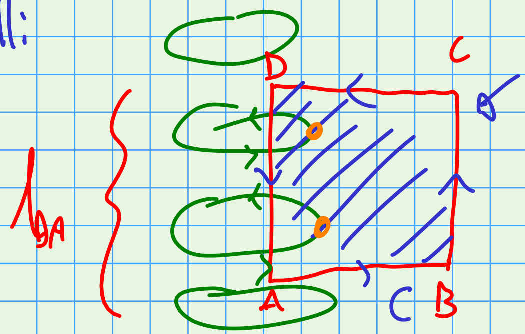


non ha correnti racchiuse

$B_{BC} = B_{DA}$ ← cioè il campo interno

è diretto lungo asse z (asse cilindro) perché $B_R = B_\varphi = 0$
e inoltre è uniforme $\boxed{B_{BC} = B_{DA}}$

il valore del campo interno: uso il circuito che taglia gli anelli:



le correnti racchiuse sono $\neq 0$

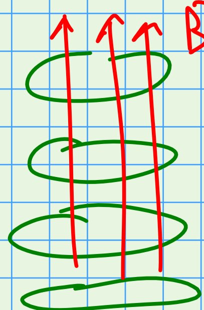
$$\int_{C_1} d\vec{\ell} \cdot \vec{B} = \mu_0 I_{racchiuso} = \mu_0 N I$$

(N = n di anelli)

$$\int_{C_1} d\vec{\ell} \cdot \vec{B} = \ell_{DA} B_{DA} + \underbrace{\ldots}_{0}$$

$$\boxed{B_{DENTRO} = \mu_0 \frac{NI}{\ell_{DA}}} = \mu_0 I n$$

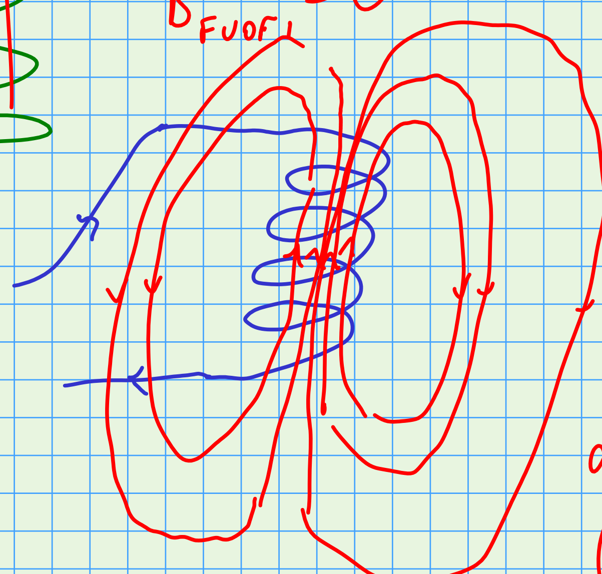
n: n. di spire per unità di lunghezza



$\vec{B}_{DENTRO} \neq 0$ ← sono linee di campo che vanno all'infinito

$\vec{B}_{FUORI} = 0$

all'atto pratico



fuori: debole (linee di campo rade)

dentro → forte (linee dense)

POTENZIALE per semplificare le eq di Maxwell

la 3° eq Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

div rot $= 0$ $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0 \quad \forall \vec{v}$

$\Rightarrow$ la 3° eq M è

AUTOMATICAM SODDISFATTA se scrivo $\boxed{\vec{B} \stackrel{def}{=} \vec{\nabla} \times \vec{A}}$

↑ def di $\vec{A}$

pot vettore (devo verificare che $\forall \vec{B}$ campo mag si possa scrivere come rotore di un campo vettoriale

↳ l'avevamo già fatto! $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \ldots$)

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$\vec{A}$ non è univocam definito: infatti rot grad $= 0$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Lambda = 0 \quad \forall \Lambda$$

$$\vec{A}' \stackrel{def}{=} \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda \qquad \Lambda \text{ campo scalare arbitrario}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda) =$$

$$= \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\cancel{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Lambda}}_{=0}$$

LIBERTÀ di GAUGE del potenziale: semplifica ulteriorm le equazioni

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda$$

$\vec{A}$, $\vec{A}'$ danno lo stesso $\vec{B}$

esempio di scelta di Gauge (saturaz. della libertà di G) è il GAUGE di COULOMB

Scegliamo Λ t.c. $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

ho saturaz della lib di gauge

$$\left.\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \vec{B} \end{aligned}\right\} \text{div + rot + condiz al contorno}$$

$\Rightarrow \vec{A}$ è univocam determinato

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda$$

div di ambo i m

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}_{\substack{\text{Impo} \\ 0}} + \nabla^2 \Lambda \iff \boxed{\nabla^2 \Lambda = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}'}$$

è eq di Poisson che posso

risolvere con metodo fn Green $\Rightarrow$ trovo Λ

usando il pot $\vec{A}$, la 3° eq di M è autocam soddisfatta

cosa succede alla 4°? $\rightarrow$ si semplifica:

gauge Coulomb

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}_{=0}) - \nabla^2 \vec{A}$$

rot rot = grad div − laplaciano

4° M: $\underbrace{\nabla^2 \vec{A}}_{\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \nabla^2 |\vec{A}|} = -\mu_0 \vec{j}$ $\leftarrow$ sono 3 eq di Poisson per le 3 componenti

$\Rightarrow$ facile da risolvere $\rightarrow$ metodo delle fn di green

la forma di $\vec{A}$ in termini delle correnti è

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

da legge di B-S $\qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times$

avevamo visto che $\vec{\nabla} \cdot \underbrace{\int_V d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{\rightarrow 0 \quad |\vec{r}| \rightarrow \infty} = 0$ $\Bigg\} \Rightarrow \vec{A}$ è nel gauge di Coulomb

RIASSUNTO delle eq MAXWELL in els e magnetost

campo el e mag sono def da forza Lorentz

$$\vec{F} \stackrel{def}{=} q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

i prin fisici (validi nel caso stazionario) sono equivalenti alle 4 eq Maxw:

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \\ &\left.\begin{aligned} &\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \\ &\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{aligned}\right\} \text{autom soddisf se scritte coi pot} \\ &\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$ eq in termini dei pot (dim)

$$\vec{E} \stackrel{def}{=} -\vec{\nabla} V \quad \text{solo statico}$$

$$\vec{B} \stackrel{def}{=} \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

4 eq scalari (tipo Poisson)

4 incognite $V, \vec{A}$

risolte le eq di Poisson $\Rightarrow$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

sono 8 eq scalari:

$2 \to \text{div} \left\langle \begin{matrix} E \\ B \end{matrix} \right.$

$6 \to \text{comp del rot} \left\langle \begin{matrix} E \\ B \end{matrix} \right.$

eq differenziali con incognite $\vec{E}, \vec{B}$

6 campi scalari

$$d^3 r' \vec{j} = dr \underbrace{da_\perp \vec{j}}_{= \vec{I}} = dr \vec{I} = d\vec{r}\, I$$

altezza di un segmentino del filo

sez del filo

corrente segue il filo

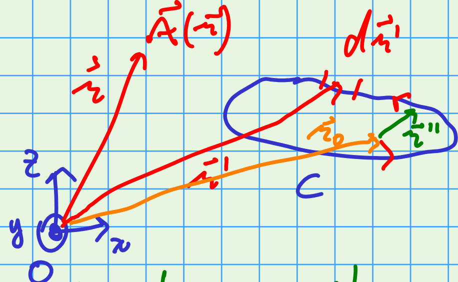
C, $d\vec{r}$, I

SVILUPPO in MULTIPOLI del pot $\vec{A}(\vec{r})$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C d\vec{r}\,' \frac{I(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

ci limitiamo al caso di corrente in un circuito C

$$\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C d\vec r\,' \frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|}$$



è un vettore "piccolo" ↳ quando il circuito è piccolo

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C d\vec r\,'' \frac{1}{|\vec r - (\vec r_0 + \vec r\,'')|}$$

$\vec r\,' = \vec r_0 + \vec r\,''$ $\qquad d\vec r\,' = d\vec r\,''$

r_0 è una costante

$$f(\vec r\,'') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\vec r\,''\cdot \vec\nabla_{\vec x}\right)^{n} f(\vec x)\Big|_{\vec x=0} \simeq$$

$$\simeq f(\vec 0) + \vec r\,''\cdot \vec\nabla_{\vec x} f(\vec x)\Big|_{\vec x=0}$$

ordine 0 → monopolo

ordine 1 → dipolo

$$\frac{1}{|\vec r - \vec r_0 - \vec r\,''|} = \frac{1}{|\vec R - \vec r\,''|} \simeq \frac{1}{R} + \vec r\,''\cdot \vec\nabla_x f(\vec x)\Big|_{\vec x=0}$$

$\vec R \stackrel{def}{=} \vec r - \vec r_0$

ordine 0

$r''=0$

$$\vec\nabla_x f(\vec x) = \vec\nabla_x \frac{1}{|\vec R - \vec x\,''|} = -\frac{\vec x\,'' - \vec R}{|\vec x\,'' - \vec R|^3}\Big|_{\vec x=0} = \frac{\vec R}{|R|^3}$$

$$\boxed{\frac{1}{|\vec R - \vec r\,''|} \simeq \frac{1}{R} + \vec r\,''\cdot\frac{\vec R}{|R|^3}}$$

← svil di dipolo di $\frac{1}{|R - \vec r\,''|}$