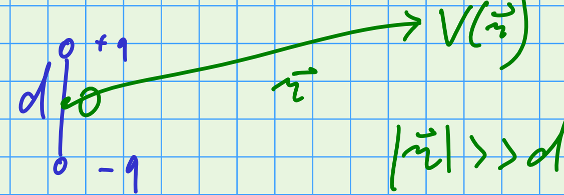
FISICA 2 27/10/20

Distinzione tra
- dipolo puro → 1° ord dello svil serie multipoli
- dipolo el →



il lim dip el per $d \to 0$, $q \to \infty$ in modo t.c.
$qd = |\vec{p}|$ è cost $\Rightarrow$ si ottiene il dipolo puro

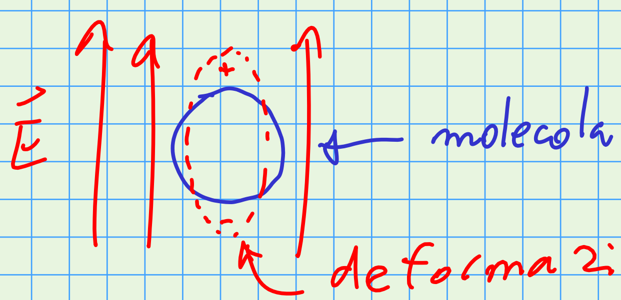
il potenziale del dipolo elettrico coincide con quello del dipolo puro se ci mettiamo a distanza >> d dall'oggetto.

ELETTROSTATICA in PRESENZA di DIELETTRICI

def DIELETTRICO: materiale isolante cioè le cariche el sono vincolate: es elettroni legati alle molecole

ciascuna molecola di un diel è un oggetto che ha un monopolo (se elettricam carico) → di solito no e un momento di dipolo (quadrupolo ....)

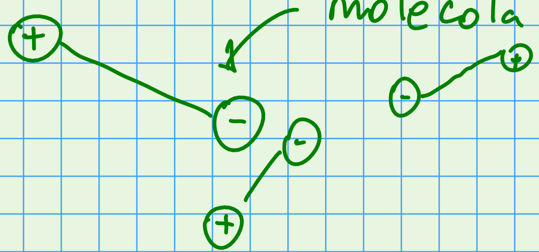
anche molecole con simmetria sferica possono guadagnare un mom di dipolo se sono in un campo el esterno



← POLARIZZAZIONE del dielettrio

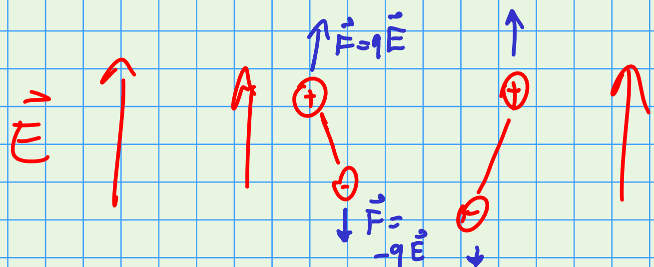
molecole che già naturalmente hanno un dipolo el

molecola con dipolo



disposte in modo casuale $\Rightarrow$ momento di dipolo è nullo in assenza di campo

↳ collettivo (medio)



Forza di Lorentz: forma una coppia di forze sui dipoli molecolari che tende ad allinearli

① Polarizzaz delle molecole a simm sferica
② Allineam delle molecole con dipolo

$\Rightarrow$ Polarizzaz macroscopica del materiale in presenza di campo el

la polarizzaz di un materiale può essere misurata con il vettore polarizzazione

↓ "densità di dipolo"

↳ def $\vec{P} \overset{def}{=} \lim_{V \to 0} \frac{\vec{p}_V}{V}$

$\vec{P}$ ← maiuscolo

$\vec{p}_V$ ← momento di dipolo del volume V

V ← volume sufficientemente piccolo che il dipolo è costante in V

→ il potenziale prodotto dalla polarizzazione del materiale

sappiamo calcolare il potenziale di un dipolo

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \vec{p} \cdot \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$\vec{r} \rightarrow$ posiz dove calcoliamo V

$\vec{r}\,' \rightarrow$ posiz dipolo

Potenziale di corpo polarizzato $\quad dV(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} d\vec{p}(\vec{r}') \cdot \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$

$$V(\vec{r}) \underset{\text{prin sovrapp}}{=} \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\vec{p}(\vec{r}') \cdot \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} =$$

Polariz $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$

$dV = d^3r$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d^3r' \, \vec{P}(\vec{r}') \cdot \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} =$$

$\vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \vec{P} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} =$$

$\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$

$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{v}) = f\,\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f$ regola di derivaz prodotto

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d^3r' \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \right)$$

volume occupato dal dielettrico

$$\underset{\text{t. Gauss}}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\int_{S=\partial V} d^2r' \, \vec{n} \cdot \frac{\vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \int_V d^3r' \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right] = V(\vec{r})$$

vi ricordate il potenziale di una distribuz di carica

densità di volume $\qquad$ densità di carica di sup

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \int_S d^2r' \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$\rho_P(\vec{r}') = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}')$ ← densità interna

$\sigma_P(\vec{r}') = \boxed{\vec{n} \cdot \vec{P}(\vec{r}')}$ ← densità sup

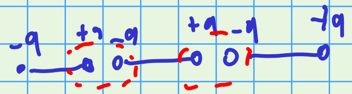
} al materiale

GIUSTIFICAZIONE :

① caso Polarizzazione interna al materiale è uniforme

$\Rightarrow \ \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$

linea:



la linea di dipoli è equiv ad un unico dipolo

materiale (oggetto tridimensionale):

tubetto di sezione $A_{sezione}$ all'interno del materiale

il momento di dipolo del tubetto

$\vec{p} = \vec{P}\,V \sim \vec{P}\,A_{sezione}\,d$

$\vec{p}$: dipolo; $\vec{P}$: polarizzaz; V: volume del tubetto

$+q \ \text{o}\!\!-\!\!\overset{d}{-}\!\!-\!\!\text{o} \ -q$

$|\vec{p}| = qd \Rightarrow q = |\vec{P}|A_{sezione}$

polarizz è uniforme nel materiale $\vec{P} = \frac{\vec{p}}{V}$

$A_{faccia}\cos\vartheta = A_{sezione}$

densità di carica + sup

$\sigma_p = \frac{q}{A_{faccia}}$ ← carica della faccia $= \frac{q}{A_{sezione}}\cos\vartheta = |\vec{P}|\cos\vartheta = \vec{P}\cdot\hat{n}$

$\vec{P}$ è ∥ al tubetto

ϑ angolo tra l'asse del tubetto e il versore ⊥ alla sup dell'oggetto $\hat{n}$

$$\boxed{\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n}}$$

② caso di polarizzaz non uniforme dentro il materiale

⇒ si accumula una carica di polarizzazione INTERNA al materiale → dividiamo il materiale in cubetti di vol v sufficientem piccoli da considerare polariz uniforme in v

⇒ possiamo usare il risultato

carica del cubetto $q_v = -\int_v d^3r' \, \rho_p(\vec{r}\,') = \int_v d^3r \, \vec{\nabla}\cdot\vec{P}$ ← segno meno

$\uparrow$ t. Gauss

$= \int_{S=\partial v} d^2r' \, \sigma_p = \int_{S=\partial V} d^2r' \, \vec{n}\cdot\vec{P}$ ← usando il risult preced

segno $-$: il materiale è neutro globalmente $\Rightarrow$ la carica interna al cubetto deve essere uguale e opposta a quella sulla sup

$\forall v$

$$\boxed{\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}}$$ ← giustificaz della densità di vol di polariz

POLARIZZ del materiale per effetto di un campo el crea densità sup $\sigma_p = \vec{n}\cdot\vec{P}$ sul materiale e una densità volume $\rho(\vec{r}\,') = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}(\vec{r}\,')$

EQ di MAX in presenza di dielettrici

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ $\qquad \rho$ carica totale

$\rho = \rho_p + \rho_f$ ← free $\quad \rho_f$ sono le cariche libere

$\varepsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho_p + \rho_f = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} + \rho_f$

$\uparrow \rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$

$\vec{\nabla}\cdot(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}) = \rho_f \longrightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_f}$ $\quad$ 1° eq di Maxw in presenza di Dielettrici

$\vec{D} \overset{def}{=} \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ ← vettore spostamento (displacement)

Continua a valere $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ ← questa è praticamente impossibile da usare

↑ incognita

ρ_P dipendono da $\vec{E}$ ⇒ complicato da gestire

è meglio lavorare in termini di $\vec{D}$ che dipende solo da ρ_F $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_F$ ← indip da $\vec{D}$ (o da $\vec{E}$)

div che rot determinano $\vec{D}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{D} = \vec{\nabla}\times(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}) = \vec{\nabla}\times\vec{P}$$

⇒ la 2° eq Maxw in pres di diel

$$\vec{\nabla}\times\vec{D} = \vec{\nabla}\times\vec{P}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_F$$

↑ cariche polariz nascoste dentro $\vec{P}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$

continuano a valere

Formalmente $\vec{P} \leftrightarrows \rho_P$

in pratica $\boxed{\vec{P}}$ è un campo medio macroscopico

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{V}$$

cariche di polarizz dipendono da ciò che accade nelle singole molecole

$\vec{P}$, se considero un volume finito (non faccio il lim $V\to 0$) è una quantità macroscopica che posso valutare in maniera semplice

SUPERFICI CARICHE in PRESENZA di DIELETTRICI

$$E^{\perp}_{sopra} - E^{\perp}_{sotto} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$ ← densità di carica TOTALE sulla sup

↑ compon ⊥ alla sup di $\vec{E}$ sopra

1° eq Maxw
+ dielettrici

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \cancel{\rho_c}\, \rho_f} \Rightarrow \text{(stesso ragionamento)} \boxed{D^{\perp}_{SOPRA} - D^{\perp}_{SOTTO} = \sigma_f}$$

↓ ricavata dal t. di gauss usando $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

densità carica liber

componenti tangenziali alla sup

$$E^{\parallel}_{SOPRA} = E^{\parallel}_{SOTTO}$$

← ricavato t. Stokes $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{E} \Rightarrow \text{(stesso ragionam)}$$

$$\boxed{D^{\parallel}_{SOTTO} - P^{\parallel}_{SOTTO} = D^{\parallel}_{SOPRA} - P^{\parallel}_{SOPRA}}$$