FISICA 2 22/10/20

ENERGIA del condensatore

usare i condensatori al posto di batterie

→ energia per spostare carica q da $\vec{a}$ a $\vec{b}$

è $W = q(V(\vec{b}) - V(\vec{a}))$

caricare un condensatore da 0 a q_{fin}

$$dW = dq\, V \overset{C=\frac{q}{V}}{=} dq\, \frac{q}{C}$$

V: dif di pot fra piastre

$$\boxed{W_{TOT}} = \int_0^{q_{fin}} dq\, \frac{q}{C} = \frac{1}{2}\frac{q_{fin}^2}{C} \overset{C=\frac{Q}{V}}{=} \boxed{\frac{1}{2} C V^2}$$

es capacità di un condensatore che sostituisca la batteria di un telefono?

en batteria $11.55\ W \cdot h = 11.55\ W \cdot 3600\,s \sim 45000\,J$

$= W_{TOT} \overset{IMP}{=} \frac{1}{2} C V^2$

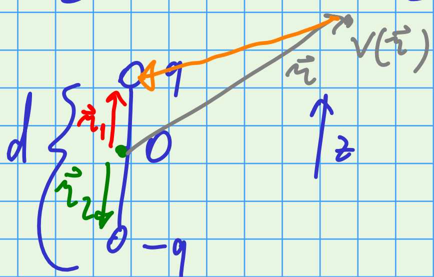
$V_{batt} = 3.85\ V$

voltaggio; Volts

$$C = \frac{2 W_{TOT}}{V^2} = \frac{2 \cdot 45000\ F}{3.85^2\ V^2}$$

$\sim 6000\ F$

DIPOLO ELETTRICO



Potenziale?

prin sovrap   pot dip

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} - \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}\right)$$

$$|\vec{r}-\vec{r}_1| = \sqrt{x^2+y^2+\left(z \mp \frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2+\frac{d^2}{4} \mp zd}$$

$|\vec{r}-\vec{r}_2|$

$\vec{r} = (x,y,z)$

$\vec{r}_1 = \left(0,0,\frac{d}{2}\right)$ $\vec{r}_2 = \left(0,0,\pm\frac{d}{2}\right)$

$d \ll r$ ss 1°ord

$$= r\sqrt{1 \mp \frac{zd}{r^2} + \cancel{\frac{d^2}{4r^2}}} \sim r\sqrt{1 \mp \frac{zd}{r^2}} \sim r\left(1 \mp \frac{zd}{2r^2}\right)$$

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$(1+x)^\alpha \sim 1+\alpha x$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} - \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}\right) \sim \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left(\underbrace{\frac{1}{1-\frac{zd}{2r^2}} - \frac{1}{1+\frac{zd}{2r^2}}}\right) =$$

$$\simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\underbrace{\frac{zd}{r^2}}_{2\alpha} = \boxed{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\vartheta\, d}{r^2} = V(\vec{r})}$$

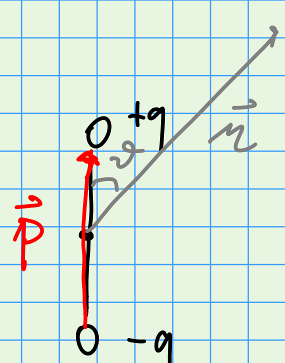
$$\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1+\alpha} = \frac{1+\alpha-1+\alpha}{1-\alpha^2} = \frac{2\alpha}{1-\alpha^2} \simeq 2\alpha$$

$\alpha^2 \ll 1$

coord polari

$x =$
$y =$
$z = r\cos\vartheta$

$\alpha = \frac{zd}{2r^2} \ll 1$ $d \ll r$



allungato di quantità q

def MOMENTO di DIPOLO: vettore che unisce le due cariche

$|\vec{p}| \stackrel{def}{=} qd$ $\vec{p}$ p minuscolo

direzione : asse tra cariche
verso : da $-q$ a $+q$

$$V = \frac{q d \cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p \cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\overbrace{\vec{p}\cdot\vec{r}}^{p\, r \cos\vartheta}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Parentesi : SVILUPPO in MULTIPOLI : estensione multidimensionale dello sviluppo in serie di Taylor

SS Taylor : $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x'^k} f(x')\Big|_{x'=0}$

SS attorno a $x=0$

per campi scalari:

$$\boxed{f(\vec{r}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}'})^k}{k!} f(\vec{r}')\Big|_{\vec{r}'=0}} \simeq f(\vec{0}) +$$

sviluppo in multipoli attorno a $\vec{r}=0$

$$\vec{r}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}'} f(\vec{r}')\Big|_{\vec{r}'=0} + \frac{(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}'})(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}'})}{2} f(\vec{r}')\Big|_{\vec{r}'=0} + \dots$$

idea: uso formula SS di Taylor per ciascuna delle 3 variabili x, y, z da cui $f(\vec{r}) = f(x,y,z)$

$$f(\vec{r}) = f(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x'^k} f(x',y,z)\Big|_{x'=0} =$$

SS rispetto x — SS risp y

$$\sum_{k,j=0}^{\infty} \frac{x^k y^j}{k!\, j!} \frac{\partial^k}{\partial x'^k} \frac{\partial^j}{\partial y'^j} f(x',y',z)\Big|_{\substack{x'=0\\ y'=0}} =$$

SS risp z

$$= \sum_{kjm=0}^{\infty} \frac{x^k y^j z^m}{k!\, j!\, m!} \frac{\partial^k}{\partial x'^k} \frac{\partial^j}{\partial y'^j} \frac{\partial^m}{\partial z'^m} f(x', y', z') \Big|_{\substack{x'=0 \\ y'=0 \\ z'=0}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'}\right)^n}{n!} f(\vec{r}') \Big|_{\vec{r}'=0}$$

? verifichiamo per 2 variabili (→ l'estensione a 3)

$$\sum_{kj=0}^{\infty} \frac{x^k y^j}{k!\, j!} \frac{\partial^k}{\partial x'^k} \frac{\partial^j}{\partial y'^j} = \sum_{kj=0}^{\infty} \frac{a^k b^j}{k!\, j!} \frac{(k+j)!}{(k+j)!}$$

$$a = x \frac{\partial}{\partial x'} \qquad b = y \frac{\partial}{\partial y'}$$

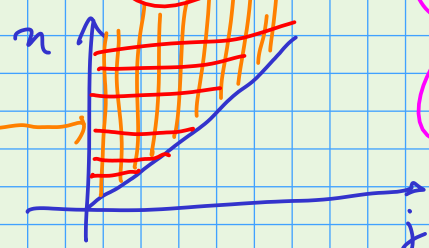
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=j}^{\infty} \frac{n!}{j!\,(n-j)!} \frac{a^{n-j}\, b^j}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

$n \overset{\text{def}}{=} k + j$

$k = n - j$

$k = 0 \quad n = j$

$\binom{n}{j}$



$(a+b)^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (a+b)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(x \frac{\partial}{\partial x'} + y \frac{\partial}{\partial y'} \right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \right)^n$$

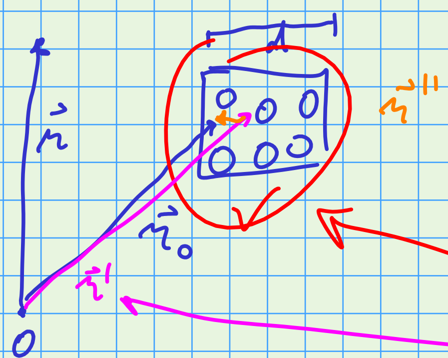
$\vec{r} : (x, y)$

$\vec{r}' \; (x', y')$

$\vec{\nabla}_{\vec{r}'} = \left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'} \right)$

SVILUPPO in MULTIPOLI del POTENZIALE

dare una buona approssimaz del potenziale di una distribuz di cariche in una posiz a distanza >> della dimensione della distribuz di cariche



$\vec r \to$ posiz dove calcolare pot
$V(\vec r)$

$\vec r_0 \to$ posiz dell'oggetto (baricentro)

pot dell'oggetto $\quad V(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V d^3r' \, \frac{\rho(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|} =$

volume dell'oggetto

$$= \int_V d^3r'' \, \frac{\rho(\vec r\,'' + \vec r_0)}{|\vec r - \vec r\,'' - \vec r_0|}$$

$\vec r\,'' = \vec r\,' - \vec r_0 \Rightarrow \vec r\,' = \vec r\,'' + \vec r_0 \qquad d^3r' = d^3r''$

$\vec r\,''$ è un vettore "piccolo" $\quad |\vec r\,''| < d$ → dimensione dell'oggetto

sviluppo multipoli

$\Rightarrow$ SS per $\vec r\,''$ piccolo

$$\frac{1}{|\vec r - \vec r\,'' - \vec r_0|} \quad \underset{\vec r\,''=0}{\text{SM attorno}} \quad \frac{1}{|\vec r - \vec r_0|} + \vec r\,'' \cdot \vec\nabla_{\vec x} \frac{1}{|\vec r - \vec r_0 - \vec x|}\Bigg|_{\vec x = 0} + \dots$$

$$f(\vec r) \simeq f(\vec 0) + \vec r \cdot \vec\nabla_{\vec r\,'} f(\vec r\,')\Big|_{\vec r\,'=0} + \frac{(\vec r \cdot \vec\nabla_{\vec r\,'})(\vec r \cdot \vec\nabla_{\vec r\,'})}{2} f(\vec r\,')\Big|_{\vec r\,'=0} + \dots$$

SMultip attorno a $\vec r = 0$

$$\vec\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec r}{r^3} \Rightarrow \vec\nabla_x \frac{1}{|\vec a - \vec x|} = \frac{\vec a - \vec x}{|\vec a - \vec x|^3} = -\frac{\vec x - \vec a}{|\vec x - \vec a|^3}$$

$$= \left.\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} + \vec{r}\,'' \cdot \frac{(\vec{r}-\vec{r}_0-\cancel{\vec{x}})}{|\vec{r}-\vec{r}_0-\cancel{\vec{x}}|^3}\right|_{\vec{x}=0}$$

$$= \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} + \vec{r}\,'' \cdot \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} \underset{1^\circ \text{ord}}{\overset{SM}{\simeq}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0-\vec{r}\,''|}$$

SM → ordine zero : MONOPOLO
" uno DIPOLO
" due QUADRUPOLO
OTTUPOLO

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V d^3r'' \frac{\rho(\vec{r}\,''+\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0-\vec{r}\,''|} \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'' \rho(\vec{r}\,''+\vec{r}_0) \times$$

$$\times\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} + \vec{r}\,''\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} + \dots\right)$$

buona approx per $|\vec{r}\,''| \ll 1$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\int_V d^3r'' \rho(\vec{r}\,''+\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} + \int d^3r'' \rho(\vec{r}\,''+\vec{r}_0)\,\vec{r}\,''\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\right)$$

q carica tot dell'oggetto

indip r''

$$= \vec{p}\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}$$

monopolo → carica totale

def MOMENTO DIPOLO $\vec{p} \overset{def}{=} \int_V d^3r'' \rho(\vec{r}\,''+\vec{r}_0)\,\vec{r}\,''$

se l'oggetto è $\frac{d}{2}$ +q, d, $-\frac{d}{2}$ −q ⇒ la def coincide con quella

data prima $\vec{p} = qd\,\hat{u}$

$\hat{u}$ versore ∥ asse z

$$\rho(\vec{r}) \underset{\uparrow}{=} q\,\delta\left(\vec{r}-\frac{\vec{d}}{2}\right) - q\,\delta\left(\vec{r}+\frac{\vec{d}}{2}\right)$$

dipolo

densità di carica puntif nella pos $\vec{r}_q$ $\quad \rho(\vec{r}) = q\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_q)$

$$\vec{p} = \int d^3r''\, \rho(\vec{r}''+\vec{r}_0)\,\vec{r}'' \overset{\vec{r}_0=0}{=} q\int d^3r''\,\vec{r}''\left(\delta\left(\vec{r}''-\frac{\vec{d}}{2}\right)-\delta\left(\vec{r}''+\frac{\vec{d}}{2}\right)\right)$$

$$= q\left(+\frac{\vec{d}}{2}+\frac{\vec{d}}{2}\right) = q\vec{d} = qd\,\vec{u}$$

$\int d^3r\, \vec{v}(\vec{r})\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \vec{v}(\vec{r}_0)$ $\qquad$ $\vec{u}$ ← versore ∥ asse z

POTENZIALE di un oggetto in approx di dipolo (svil serie multipolo al 1 ord)

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} + \frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\right] \rightarrow \circledast$$

è approssimato e vale solo se $\vec{r}$ è ad una distanza dall'oggetto >> d ← dimensione dell'oggetto