FISICA 2 , 15/10/20

SUPERFICI CARICHE   sup piane ∞

caso di carica distribuita unif $\rightarrow$ densità $\sigma = \frac{q_a}{a}$

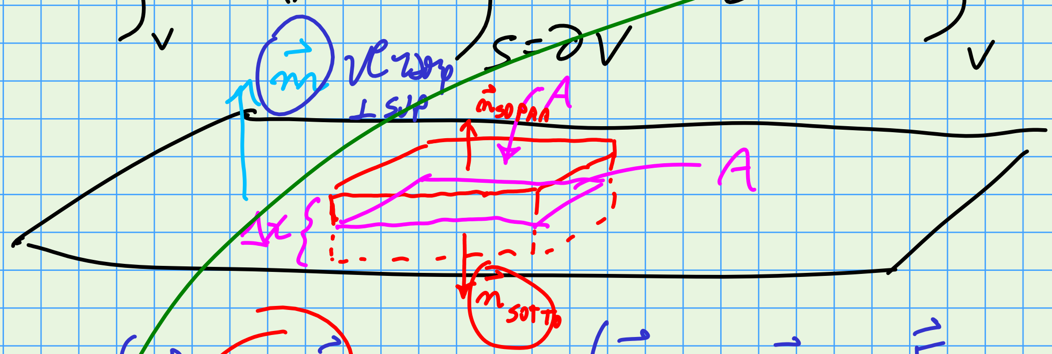
abbiamo un campo el $\vec{E}(\vec{r})$ e vediamo come cambia se aggiungo la sup

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ sezione di

$$\int_V d^3r\, \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \int_{S=\partial V} d^2r\, \vec{n}\cdot\vec{E} = \int_V d^3r\, \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

carica sup rosa

carica è limitata alla sup



$\Delta x \to 0$ sup laterali

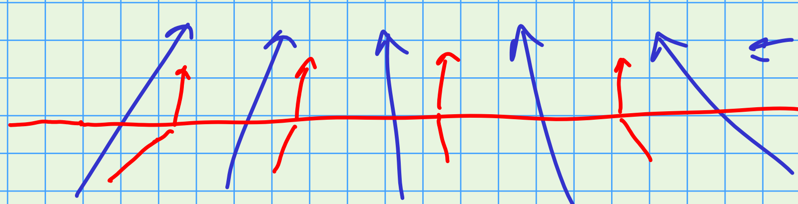
$$\int_{S=\partial V} d^2r\, \vec{n}\cdot\vec{E} = A\left(\vec{E}_{sopra}\cdot\vec{m} - \vec{E}_{sotto}\cdot\vec{m}\right) + \Delta x\left(\cdots\right)$$

versore ⊥

perché $\vec{m}$ è opposto a $\vec{n}_{sotto}$

$$= \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\left(\vec{E}_{SOPRA} - \vec{E}_{SOTTO}\right)\cdot\vec{m} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

La compon ⊥ alla sup $\vec{E}\cdot\vec{m}$ varia di $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$



← BLU campo senza sup

← ROSSO campo con sup

COMPON TANGENTI alla sup:

T. Stokes

$$\oint_{C=\partial S} d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}) \underset{\text{t. Stokes}}{=} \int_S d^2r\,\vec{n}\cdot\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{E}}_{=0 \text{ 2° eq Maxw}} = 0$$

$$\| \qquad\qquad \Delta x \to 0$$

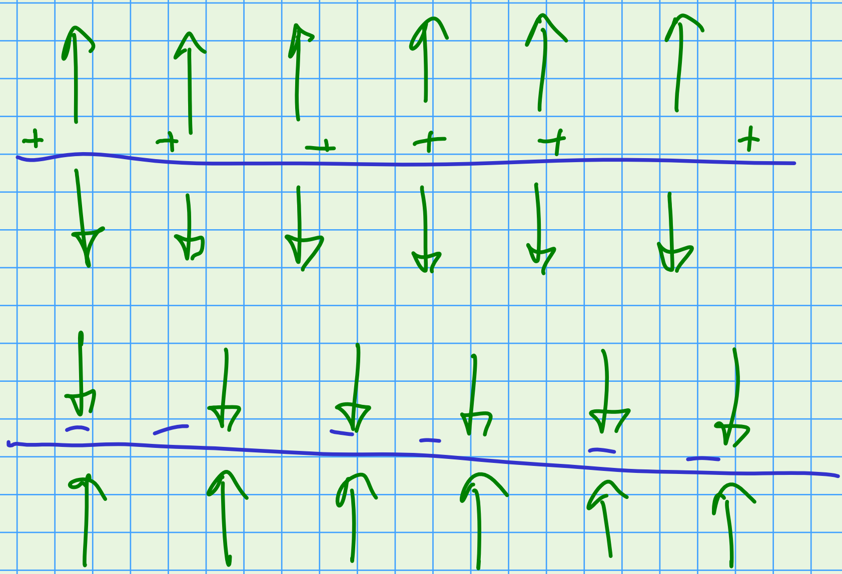
$$\underline{\vec{L}\cdot\vec{E}_{SOPRA} - \vec{L}\cdot\vec{E}_{SOTTO}} + \cancel{\Delta x(\dots)}$$

$\vec{L}$ è tangente alla sup

$$\vec{E}^{\,tangenz}_{SOPRA} = \vec{E}^{\,tangenz}_{SOTTO}$$

$\vec{E}^{\,tang}$ $\quad E_x \; , \; E_y$

• CAMPO GENERATO dalla sup (senza campo esterno)



← sup vista di taglio

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$|\vec{E}_{SOPRA} - \vec{E}_{SOTTO}| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$|\vec{E}_{SOPRA}| = |\vec{E}_{SOTTO}| \quad \leftarrow \text{SIMMETRIA}$$

$$|\vec{E}_{SOPRA}| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad \vec{E}_{SOPRA} = -\vec{E}_{SOTTO}$$

ENERGIA del campo el

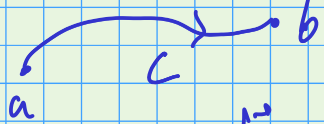
ENERGIA = LAVORO $\qquad dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$ ← energia ottenuta se l'oggetto è spostato da una forza $\vec{F}$ di uno spostam $d\vec{r}$

↑ Work = Energia

energia spesa = lavoro compiuto

$$dW = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Lavoro compiuto per muovere una carica q



$\vec{E}(\vec{r})$

$$W_{sp} = -\int_{\vec{a},\,c}^{\vec{b}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -q\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{r}\cdot\vec{E} = -q\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{r}\cdot\vec{E} =$$

$\uparrow \vec{F} = q\vec{E}$ $\quad \cancel{c}$

$$= +q\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{r}\cdot\vec{\nabla}V = q\left(V(\vec{b}) - V(\vec{a})\right)$$

La differenza di potenziale è l'energia per unità di carica

$$\boxed{V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = \frac{W_{sp}}{q}}$$

VOLTAGGIO = differenza di potenziale $\quad$ unità $\rightarrow$ Volts

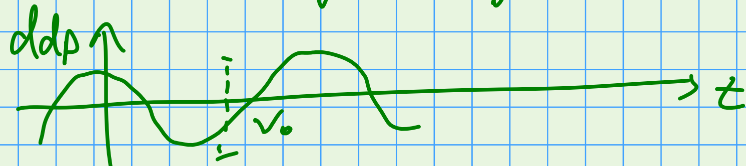
es presa elettrica $\quad$ • • → terra • $\}$ 220 V

presa usb $\rightarrow$ 5 V
batteria auto $\rightarrow$ 12 V
$\}\leftarrow$ corrente continua

corrente continua $\rightarrow$ ddp è costante nel tempo

corrente alternata $\rightarrow$ ddp dip dal tempo

di solito $\quad V = V_0 \cos \omega t$



$\omega = 2\pi\nu$
freq angolare

ν frequenza: quante oscillaz al secondo

$Hz = \frac{1}{s}$
$\uparrow$
Hertz

$V_0 = 220\,V\sqrt{2} \sim 311\,V$

$\updownarrow$ in Italia

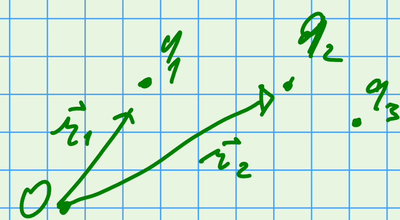
$\nu = 50\,Hz = \quad \omega \sim 314\ rad/s$

MASSA (in senso elettrico) → punto dove scegliamo pot $=0$

mettere a massa → mettere a pot 0

esempio → polo nero batteria auto

TERRA → potenziale del terreno



ENERGIA di una distribuz di carica

cioè $\boxed{\text{energia contenuta dalla distrib di carica = lavoro necessario a disporre le cariche}}$

↑ conservaz energia

calcolare il lavoro compiuto per creare la distrib:

1 prima carica q_1 in $\vec{r}_1$ → costa energia zero (niente campo el) $W_1 = 0$

2 seconda carica q_2 in $\vec{r}_2$: devo muoverla nel campo della prima

$\vec{r}_{iniz}$ è un punto all'infinito se vogliamo calcolare en totale

$$W_2 = q_2 \left[V_1(\vec{r}_2) - \underbrace{V_1(\vec{r}_{iniz})}_{=0} \right]$$

pot dovuto al campo della prima carica

$$V_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$$

$$= q_2 V_1(\vec{r}_2)$$

3 terza carica: sente il campo $\vec{E}_2 + \vec{E}_1$ (prin sovrapp)

il pot $(V_1 + V_2)$

$$V_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|}$$

$$\Rightarrow \text{en } W_3 = q_3 \left[V_1(\vec{r}_3) + V_2(\vec{r}_3) - \cancel{V_1(\vec{r}_{iniz})} - \cancel{V_2(\vec{r}_{iniz})} \right]$$

4 carica n

$$W_n = q_n \sum_{k=1}^{n-1} V_k(\vec{r}_n)$$

↑ lavoro compiuto per posiz carica n

pot della carica k

posiz della carica n

5 en tot: la somma dei lavoro compiuto per posiz tutte

N → n tot di cariche

$$W_{TOT} = \sum_{n=1}^{N} W_n = \sum_{n=1}^{N} q_n \sum_{k=1}^{n-1} V_k(\vec{r}_n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \cancel{q_n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{q_k q_n}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_n - \vec{r}_k|}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq n}}^{N} \frac{q_k q_n}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_n - \vec{r}_k|} \frac{1}{2} =$$

← pot dovuto alle altre cariche

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{q_n}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq n}}^{N} \underbrace{\frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_n - \vec{r}_k|}}_{V_k(\vec{r}_n)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{q_n}{2} V(\vec{r}_n)$$

pot TOT (prin sovrapp)

↑ pot dovuto a tutte le ALTRE (no n)

$$\boxed{W_{TOT} = \frac{1}{2} \sum_{n} q_n V(\vec{r}_n)}$$

en tot nella distrib $q_1 \dots q_N$ $\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N$

caso continuo $\sum_{n=1}^{N} q_n \longrightarrow \int_0^{Q_{TOT}} dq = \int_{V} d^3r\, \rho(\vec{r})$

V vol ∀ che contenga tutte le cariche

$\rho(\vec{r}) = 0$ fuori da V

$$\boxed{W_{TOT} = \frac{1}{2} \int_V d^3r\, \rho(\vec{r})\, V(\vec{r})}$$

en in termini del pot

$$\boxed{W_{TOT} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \; E^2(\vec{r})}$$

en in termini del campo

dim:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \implies W_{TOT} = \frac{1}{2}\int_V d^3r \; \rho(r) \; V(\vec{r}) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_V d^3r \; \varepsilon_0 (\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) V(\vec{r}) =$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}V) = V\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \vec{E}\cdot\vec{\nabla}V}$$

regola di derivaz del prodotto

$$\frac{\partial (fg)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} g + \frac{\partial g}{\partial x} f$$

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})V = \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}V) - \vec{E}\cdot\vec{\nabla}V$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\underbrace{\int_V d^3r \; \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}V)}_{\text{t. Gauss}} - \int_V d^3r \; \vec{E}\cdot\vec{\nabla}V\right] =$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int_{S=\partial V} d^2r \; \vec{n}\cdot\vec{E}V - \int_V d^3r \; \vec{E}\cdot\vec{\nabla}V\right] =$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int_S d^2r \; \vec{n}\cdot\vec{E}V + \int_V d^3r \; E^2\right] \qquad \forall V$$

$$\int_S d^2r \; \vec{n}\cdot\vec{E}V \to 0$$

$$\int_V d^3r\, E^2 \to \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \; E^2$$

V = sfera di raggio ∞

$$S \sim R^2$$

$$|E| \sim \frac{1}{R^2}$$

$$V \sim \frac{1}{R}$$

$$\boxed{W_{TOT} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \; E^2}$$

$\frac{\varepsilon_0}{2} E^2$ è "la densità di energia"

OSSERVAZIONI

① EN di AUTO - INTERAZ (self-energy)

PROBLEMA nell'usare le formule continue per calcolare l'energia di carica puntiforme

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \, E^2 = \frac{q^2}{8\pi^2 \varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \, \frac{1}{r^4} = \frac{q^2}{8\pi^2 \varepsilon_0} \underbrace{\int_0^{+\infty} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{1}{r^4}}$$

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

carica puntif all'origine

$$4\pi \int_0^{+\infty} dr \, \frac{1}{r^2} = +\infty$$

$$d^3r = dx\,dy\,dz = r^2 dr \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

NON abbiamo considerato l'energia necessaria a creare una partic puntiforme $\rightarrow$ è un en ∞

en di auto interaz