FISICA2 14/10/20

PROPRIETÀ POTENZIALE SCALARE $V(\vec{r})$

① $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ pot def a meno di cost $\Rightarrow$

ARBITRARIETÀ $\Rightarrow$ di per sé pot non ha signif fisico

le derivate del pot $\rightarrow \vec{E}$

$\boxed{\text{la differenza di pot}}$ $V(\vec{b}) + \cancel{k} - V(\vec{a}) - \cancel{k}$

② POTENZIALE dal campo el

$$\underbrace{V(\vec{r}) = -\int_{\vec{z}}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{E}(\vec{r}\,')}$$

punto (arbitrario) $V(\vec{z}) = 0$

$|\vec{z}| \rightarrow \infty$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \Rightarrow -\int_{\vec{z}}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{E} = \int_{\vec{z}}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{\nabla} V = V(\vec{r}) - \cancel{V(\vec{z})}$$

t gradiente

③ il NOME! il potenziale V non ha niente a che vedere con l'energia potenziale

↳ vedremo dal potenziale si può calcolare l'energia di campo $\vec{E}$

④ RIDONDANZA di $\vec{E}$ $\rightarrow$ $\vec{E} = (E_x(\vec{r}), E_y(\vec{r}), E_z(\vec{r}))$

$\vec{E} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$ è determinato da $\boxed{\text{un}}$ campo scalare

ridondanza espressa $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

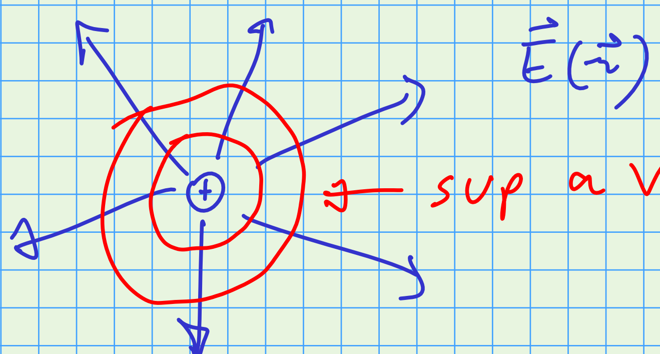
⑤ la rappres grafica del pot:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = - \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \Rightarrow$$ è un vettore che punta verso la direz di massimo cambiam di V

in direz opposta

$\Rightarrow \vec{E} \perp$ alle sup di V costante

es partic puntiforme



⑥ PRIN SOVRAPP → il pot è una fn lineare di $\vec{E}$ $\Rightarrow$ vale il pr sovrapp per pot $\Leftrightarrow$ il pot totale è la somma dei pot delle singole cariche

⑦ Unità di Misura

Campo el $\quad \vec{E} \overset{def}{=} \frac{\vec{F}}{q} = \left[\frac{N}{C}\right] \overset{def}{=} \left[\frac{V}{m}\right]$

$\frac{\text{Newton}}{\text{Coulomb}} \overset{def}{=} \frac{\text{Volt}}{\text{metro}}$ $\quad$ Alessandro Volta

Potenziale : $V = -\int d\vec{r} \cdot \vec{E} = \left[\frac{N}{C} m\right] = [V]$ Volts

POTENZIALE $\rightarrow$ serve a semplificare le eq Maxw

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= \rho/\varepsilon_0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} &= 0\end{aligned}}$$

$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

rot grad = 0
la 2° è automaticam soddisfatta

$$\vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla} V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0}$$

Eq. di Poisson

$V(\vec{r})$ incognita
$\rho(\vec{r})$ dato

4 eq diff scalari 1° ordine $\Longleftrightarrow$ 1 eq differ 2° ordine

Esempio $\rightarrow$ carica puntiforme nell'origine $\rho(\vec{r}) = q\,\delta^{(3)}(\vec{r})$

$\Rightarrow$ Eq Poisson $\nabla^2 V = -\dfrac{q}{\varepsilon_0}\,\delta(\vec{r})$

Sappiamo che $\nabla^2 \dfrac{1}{r} = -4\pi\,\delta(\vec{r})$

$$\Bigg\} \; V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \cancel{+c}$$

già ottenuto

GENERALIZZAZIONE a casi arbitrari $(\forall \rho(\vec{r}))$: soluz dell'eq di Poisson usando il prin sovrapp

- METODO delle FN GREEN

serve per risolvere eq $\boxed{D_x f(x) = c(x)}$

dato

op differenziale lineare

a partire dalla soluzione di $\boxed{D_x G(x,s) = \delta(x-s)}$
(è più semplice da risolvere)

Fn di Green

se moltiplico ambo i m per $c(s)$ e integro su s

$$\underbrace{\int ds\, c(s)\, D_x\, G(x,s)} = \int ds\, \delta(x-s)\, c(s)$$

$$= \int ds'\, \delta(s')\, c(s'+x) = c(x)$$

$$s' = s - x \qquad ds' = ds$$

$$\delta(x-s) = \delta(s-x)$$

$$\underline{D_x \int ds\, c(s)\, G(x,s)}$$

$\Rightarrow$ soluz della 1° eq differ $\boxed{f(x) = \int ds\, c(s)\, G(x,s)}$

metodo fn di Green per eq Poisson $\boxed{\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$

$$\nabla^2 G(\vec{r},\vec{s}) = \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{s})$$

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\, \delta^{(3)}(\vec{r}) \Rightarrow \nabla^2\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{s}|}\right) = \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{s})$$

$$G(\vec{r},\vec{s}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{s}|} \Rightarrow V(\vec{r}) = \int d^3s \left(-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) G(\vec{r},s) =$$

$$= \int d^3s\, \frac{\rho(\vec{s})}{4\pi\varepsilon_0}\, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{s}|}$$ $\leftarrow$ sapevamo già

POTENZIALE dalle eq Maxw

Eq Maxw $\overset{rot}{\Longleftrightarrow}$ Eq Poisson $\Rightarrow$ potenziale $\Rightarrow$ campo el $\vec{E}$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \int d^3s\, \frac{\rho(\vec{s})}{4\pi\varepsilon_0}\, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{s}|} =$$

$$= -\int d^3s\, \frac{\rho(\vec{s})}{4\pi\varepsilon_0}\, \underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{s}|}} = -\frac{\vec{r}-\vec{s}}{|\vec{r}-\vec{s}|^3}$$

campo el per distribuz continua

è equivalente alla legge di Coulomb

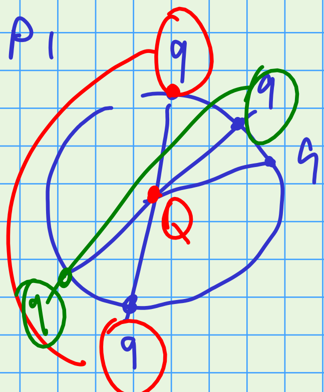
$\Rightarrow$ legge di Coulomb

Avevamo ottenuto legge di Coulomb $\Rightarrow$ eq Maxw

Equivalenza logica tra $\underbrace{\text{eq Maxw}}_{\text{assiomi}}$ e $\underbrace{\text{legge di Coulomb}}_{\text{prin fisico}}$ (prin di sovrapposiz)

assiomi $\Longleftrightarrow$ prin fisico

ESEMPI



① carica q ad ogni ora dell'orologio

Forza su carica Q ?

$\rightarrow = 0$ per simmetria
prin sovrap

② Tolgo la carica delle ore "6". Quale è la forza su Q ?

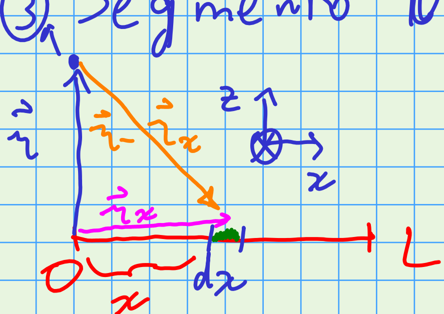
uso prin sovrapp $\rightarrow$ carica 0 alle 6

se aggiungo $-q$ alle ore 6 dalla situaz precedente

$$\vec{F} = \frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{k}$$

③ Segmento lungo L con carica q (uniforme)

campo el in un punto a dist z



$\vec{r} = (x=0,\ y=0,\ z)$

$\vec{E}(\vec{r})$?

solo per simmetria $E_y = 0$

E_x, E_z ?

L'el dx del segmento — posiz del segmentino

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, dq\, \frac{(\vec{r} - \vec{r}_x)}{|\vec{r} - \vec{r}_x|^3}$$

carica del segmentino

$$|\vec{r} - \vec{r}_x| = \sqrt{x^2 + z^2}$$

$$(\vec{r} \cdot \vec{i}) = 0$$

$$\vec{r}_x \cdot i = x$$

$$dE_x(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, dq\, \frac{(\vec{r} - \vec{r}_x)\cdot \vec{i}}{|\vec{r} - \vec{r}_x|^3}$$

versore ∥ asse x

$$dq = dx\left(\frac{q}{L}\right) \lambda$$

contributo del segmentino dx $= \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, dq\, \dfrac{(-x)}{(x^2+z^2)^{3/2}}$

$$E_x(\vec{r}) = -\int_0^L dx\, \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, \frac{q}{L}\, \frac{x}{(x^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{L}\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2+L^2}}\right]$$

$$dE_z(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, dq\, \frac{(\vec{r} - \vec{r}_x)\cdot \vec{k}}{|\vec{r} - \vec{r}_x|^3}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{k} = z$$

$$(\vec{r}_x \cdot \vec{k}) = 0$$

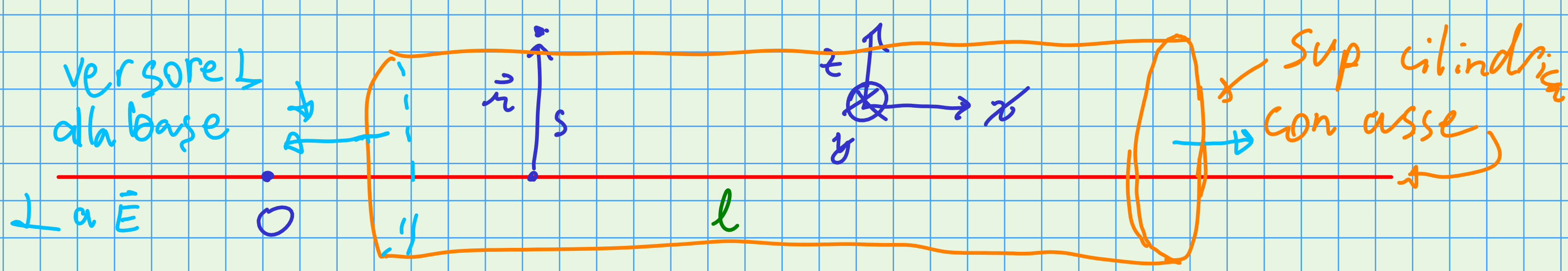
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, dx\, \frac{q}{L}\, \frac{z}{(x^2+z^2)^{3/2}}$$

$$E_z(\vec{r}) = \int_0^L dx\, \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, \frac{qz}{L}\, \frac{1}{(x^2+z^2)^{3/2}} = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 L}\, \frac{1}{z^2\sqrt{z^2+L^2}}$$

1 → SIMMETRIA

2 → elementini infinitesimi → integrare

④ Campo el nel punto $\vec{r}$ distante s da una retta ∞ con densità di carica λ



SIMMETRIA CILINDRICA
e simmetria per traslaz } $\vec{E}$ sarà radiale uscente dal filo

cioè linee di campo spilli che escono $\perp$ al filo

t. di Gauss: flusso di $\vec{E}$ attrav sup $\int_S d^2r\, \vec{n}\cdot\vec{E} =$

$\vec{n}$ è $\parallel$ ad $\vec{E}$ in ogni punto

flusso attraverso le basi $= 0$

$$= \int_S d^2r\, |\vec{E}| = |\vec{E}| \int_S d^2r \stackrel{\downarrow}{=} |\vec{E}|\, 2\pi s\, \ell$$

E è costante sulla sup del cilindro

altezza cilindro

$$= \int_V d^3r\, \vec{\nabla}\cdot\vec{E} \stackrel{1^\circ \text{ eq Max}}{=} \int_V d^3r\, \rho/\varepsilon_0 = \frac{1}{\varepsilon_0} \underbrace{\lambda \ell}$$

t Gauss V è volume cilindro

carica totale contenuta nel cilindro

$$|\vec{E}| = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 s}\lambda \quad \leftarrow \text{modulo}$$

$\vec{E} \perp$ a asse x (radiale) $\leftarrow$ direz

entrante o uscente a seconda del segno di λ