FISICA 2 13/10/20

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = (\vec{\nabla} f)_r \, dr + (\vec{\nabla} f)_\vartheta \, r \, d\vartheta + (\vec{\nabla} f)_\varphi \, r \sin\vartheta \, d\varphi$$

$$= \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi$$

Eguaglio i coeff di

$$\left.\begin{aligned} dr &\to (\vec{\nabla} f)_r = \frac{\partial f}{\partial r} \\ d\vartheta &\to (\vec{\nabla} f)_\vartheta \, r = \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \\ d\varphi &\to (\vec{\nabla} f)_\varphi \, r \sin\vartheta = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{aligned}\right\} \quad \vec{\nabla} f = \vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\stackrel{def}{=} \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Divergenza in coordinate polari:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 v_r \right) + \dots$$

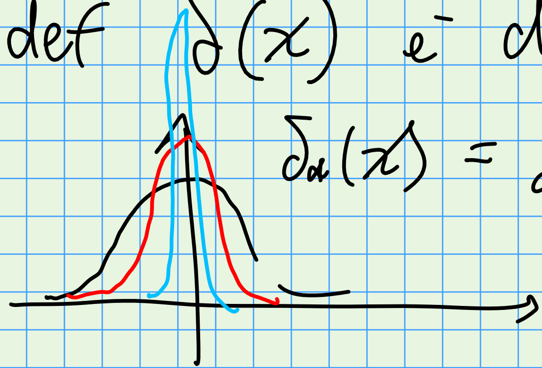
compon radiale di $\vec{v}$

- DELTA di DIRAC $\to$ estensione continua

δ di Kronecker
$$\delta_{nm} \stackrel{def}{=} \begin{cases} 1 & \text{se } n = m \\ 0 & \text{" } n \neq m \end{cases}$$

$$\text{"}\mathbb{1}\text{"} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ & & 1 \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

def $\delta(x)$ è distribuzioni $\rightarrow$ limite funzionale

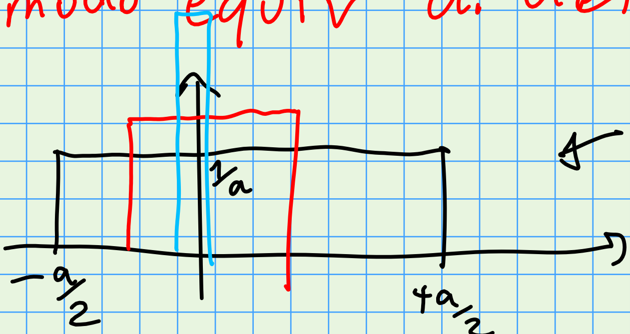


$$\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$\delta(x) \sim \lim_{a\to 0} \delta_a(x)$$

$$\int dx\, \delta(x) = 1$$

modo equiv di def δ di Dirac



$\leftarrow \delta_a(x)$

$$\lim_{a\to 0} \int dx\, \delta_a(x)\, f(x)$$

$$\boxed{\int dx\, \delta(x)\, f(x) = f(0)}$$

$\leftarrow$ possibile def di δ di Dirac

$x \to x' = x + x_0 \qquad dx = dx'$

$$\int dx'\, \delta(x' - x_0)\, \underbrace{f(x' - x_0)}_{f(x)} = f(x_0)$$

$$\sum_m \delta_{nm} f_m = f_n$$

$$\delta(x_n - x_m) \sim \delta_{nm}$$

$\delta^2(x) \rightarrow$ NON esiste

δ di Dirac 3 dimensionale

$$\delta^{(3)}(\vec{r}\,) = \delta(\vec{r}\,) \overset{def}{=} \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$$

$\hookrightarrow \vec{r} = (x, y, z)$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r}) \qquad \nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\,\delta(\vec{r})}$$

t. Gauss

$\frac{\vec{r}}{r^3}$ è costante su S e $\frac{\vec{r}}{r^3} \parallel \vec{n}$

$$\int_V d^3r\ \vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} = \int_{S=\partial V} d^2r\ \vec{n}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} =$$

V: SFERA di raggio R $\qquad$ $S=\partial V$: sup sferica raggio R

$$= \int_{S=\partial V} d^2r\ \frac{1}{r^2} = \frac{1}{R^2}\underbrace{\int_{S=\partial V} d^2r}_{4\pi R^2} = 4\pi \qquad \forall R\neq 0$$

$\vec{n}\cdot\vec{r} = r$

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 v_r + \underbrace{\ldots}_{=0} =$$

div in cord polari $\qquad \frac{\partial}{\partial\vartheta} \quad \frac{\partial}{\partial\varphi}$

$\vec{v} = \frac{\vec{r}}{r^3} \qquad v_\vartheta = 0 \quad v_\varphi = 0 \qquad v_r = \frac{1}{r^2}$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r^2}{r^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} 1 = 0$$

$r\neq 0$

$\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}$ è $=0$ se calcolata $\vec{r}\neq 0$

$$\int_V d^3r\ \vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi \qquad \forall \text{ volume sferico } R>0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi\,\delta(\vec{r})}$$

$$g(x) = \begin{cases} -1 & x<0 \\ +1 & x>0 \end{cases} \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = 2\,\delta(x)$$

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})$$ laplaciano = div grad

$$\vec{\nabla}\frac{1}{r} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r} + \cancel{\vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\frac{1}{r}}^{=0} + \cancel{\vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{r}}^{=0}$$

$$= \vec{e}_r\left(-\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad \boxed{\vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}}$$

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\nabla^2\frac{1}{r} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r} = \vec{\nabla}\cdot\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -4\pi\delta(\vec{r})$$

1° EQ MAXWELL

Legge di Coulomb $\Rightarrow$ legge di Gauss $F = \int_{S=\partial V} d^2r\, \vec{n}\cdot\vec{E} =$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{\int_V d^3r\, \rho(\vec{r})}_{\text{cariche interne a } V} \overset{\text{t. di Gauss}}{=} \int_V d^3r\, \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$

$$\int_V d^3r\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) = 0 \quad \text{vale } \forall V$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$$

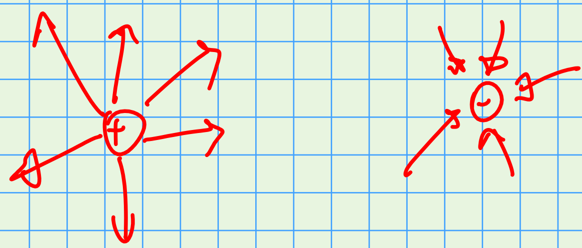
$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}}$$ 1° eq Maxwell ottenuta in elstat (vale anche in eld)

SIGNIFICATO 1° EQ M:

div di campo vett (t. gauss) in un volumetto dV
= flusso del campo attrav il bordo

$\Downarrow$

le cariche EL sono la SORGENTE del campo el



le linee di campo el $\vec{E}$ partono o finiscono sulle cariche

POTENZIALE in elstatica

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V}$$

convenzione

campo el è grad di campo scalare

vale solo in els → in eldinamica

$$\left[\ \vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\ \right]$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3 r' \, \rho(\vec{r}\,') \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} =$$

legge di Coulomb per distribuz continua

$$\vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

traslando l'origine di $\vec{r}\,'$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3 r' \, \rho(\vec{r}\,')\left(-\vec{\nabla}_{r}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) =$$

$$= \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}_{r}\int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\vec{\nabla}_{r}\underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{\overset{def}{=}\ V(\vec{r}) + cost}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

V non è univocam definito

Convenzione: si sceglie la cost in modo che

$V(\vec{r}) \to 0 \quad |\vec{r}| \to \infty$ se $\rho(\vec{r}\,') \to 0$

$$V(\vec{r}) \stackrel{def}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \leftarrow \text{caso distribuz continua}$$

def densità di carica per carica puntiforme q nella posiz $\vec{r}_q$

$$\boxed{\rho(\vec{r}) = q\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_q)}$$

$\forall$ volume che contiene $\vec{r}_q$ $\int_V d^3r\,\rho(r) = q$

$0 \leftarrow$ se V non contiene origine

$$\int_{V \text{ contiene origine}} d^3r\,\delta(\vec{0}) = 1$$

$\int d^3r\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)f(\vec{r}) = f(\vec{r}_0)$

POT per carica puntiforme q:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_q)\,q}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_q|}$$

Pot. per N cariche puntiformi $\to$ prin sovrapposiz (pot è lineare)

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_{q_i}|}$$

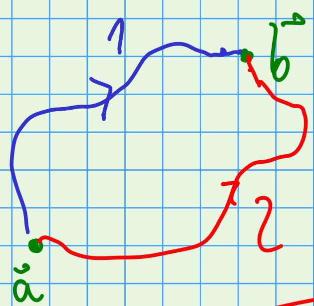
$\boxed{\text{rot grad} = 0}$ $\quad \forall f(\vec{r}) \quad \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}f = \vec{0}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}V = 0 \iff \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0}}$$

2° Eq Maxwell vale SOLO in ELST

Eq Maxwell in eld $\quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

SIGNIFICATO: un campo irrotaz è conservativo campo vettor $\vec{v}$ è conservativo $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ un integrale di circuitazione dipende solo dal punto di partenza e di arrivo e non dal percorso



$$\int_{C_1\,\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{r}\cdot\vec{E} \overset{\text{campo cons}}{=} \int_{C_2\,\vec{a}}^{b} d\vec{r}\cdot\vec{E} \underset{\text{solo su campi conserv}}{=} \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{r}\cdot\vec{E}$$

il campo è irrotazionale

T di Stokes

$$\int_S d^2r\; \vec{n}\cdot\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{E}}_{=0} = \int_{C=\partial V} d\vec{r}\cdot\vec{E} = \int_{C_1\cup -C_2} d\vec{r}\cdot\vec{E} =$$

↑ circuito chiuso

segno − per il circuito rosso che va da $\vec{b}$ ad $\vec{a}$

$$C = C_1 \cup -C_2$$

$$= \int_{C_1} d\vec{r}\cdot\vec{E} + \int_{-C_2} d\vec{r}\cdot\vec{E} = \int_{C_1} d\vec{r}\cdot\vec{E} - \int_{C_2} d\vec{r}\cdot\vec{E} = 0$$

$$\int_{C_1\,\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{r}\cdot\vec{E} = \int_{C_2\,\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{r}\cdot\vec{E}$$ ← campo conservativo

Eq Maxw Els

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= \rho/\varepsilon_0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} &= 0\end{aligned}}$$

↑

4 Eq differ Scalari con incognita $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$

sono postulati perché dato il rot e la div di un campo vettor + condiz al contorno

⇓

il campo vett è univocam determinato