Fisica 2 7/10

Campo el di set di cariche

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i q_i \frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \longrightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{Q_{TOT}} dq(\vec{r}')\,\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

el infinitesimo di carica $dq(\vec{r})$

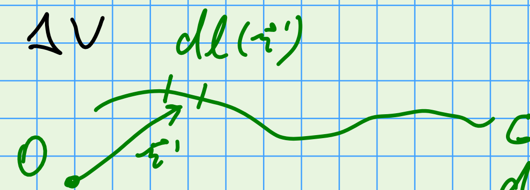
DENSITÀ di CARICA:

densità lineare (se carica è su un filo) $\lambda(\vec{r}') \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta L\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta L}$ carica nel segmento ΔL

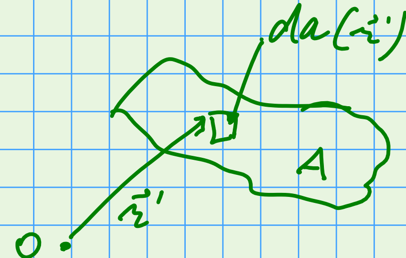
" superficie: $\sigma(\vec{r}') = \lim_{\Delta a\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta a}$ carica nella sup Δa

" volume: $\rho(\vec{r}') = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta V}$ carica nel vol ΔV

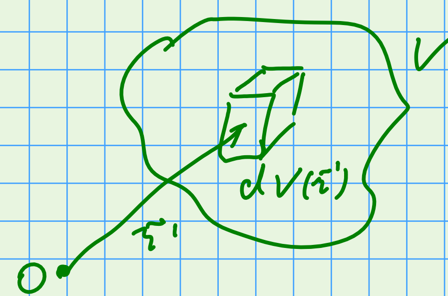
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C dl(\vec{r}')\,\lambda(\vec{r}')\,\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$



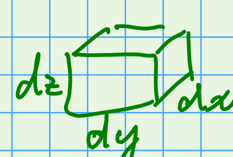
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_A da(\vec{r}')\,\sigma(\vec{r}')\,\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V dV(\vec{r}')\,\rho(\vec{r}')\,\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

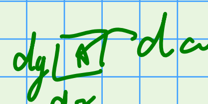


$$\int_V dV(\vec{r}') \stackrel{def}{=} \int_V d^3r' = \int dx\,dy\,dz$$



$$\int_A da(\vec{r}') \stackrel{def}{=} \int_A d^2r' = \int dx\,dy$$

$A = A(x,y)$

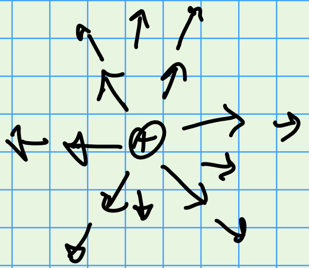


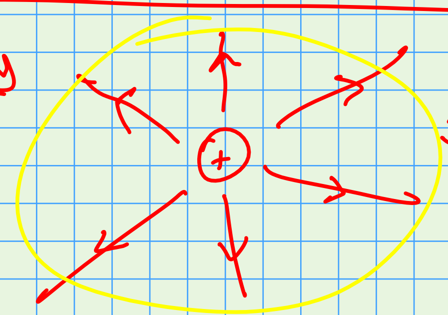
$$\int_C dl(\vec{r}') = \int dr$$

dl

RAPPRESENTAZ CAMPO VETT → metodo linee di campo

unire tutti i vettori adiacenti in una curva





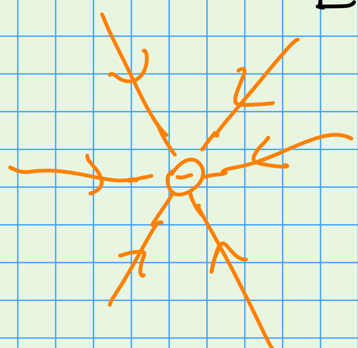
si perde l'info sulla lunghezza

⇓

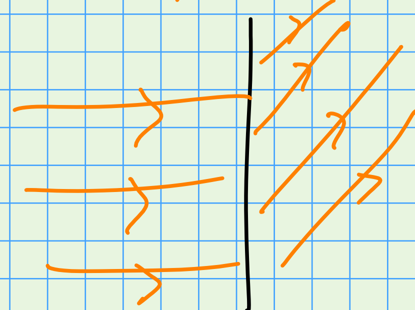
convenzione: l'intensità è $\propto$ alla densità delle linee di campo

$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{\vec{r}}{r^3}$ ← se carica all'origine $\vec{r}_q = 0$

↑ campo vett radiale



linee di campo vale anche per campi discontinui



le linee di campo non si intersecano mai

$\boxed{\text{LEGGE di GAUSS}}$ → calcolo del flusso del campo attraverso una superficie S

flusso del campo: metafora

linee di campo → spilli

flusso = n. di spilli che bucano la sup

SUP PIANA S

def FLUSSO di campo $\vec{v}$ attraverso S:

$$F \overset{def}{=} \vec{v} \cdot \vec{n}\, a$$

↓ area di S

↑ versore ⊥ a S

Superficie qualunque

$d F(\vec{r}) = \vec{v} \cdot \vec{n}\, da = \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})\, da(\vec{r})$

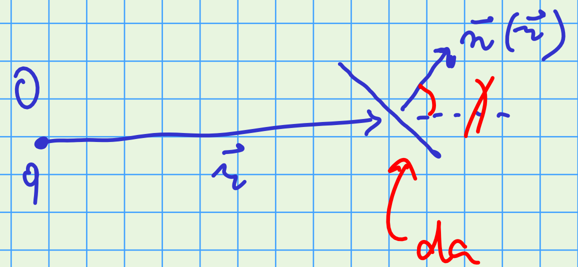
↑ flusso attrav da nella posiz $\vec{r}$

↑ elemento infinitesimo della sup S

CAMPO EL

$$dF = \vec{E} \cdot \vec{n}\, da = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}\, da}{r^3}$$

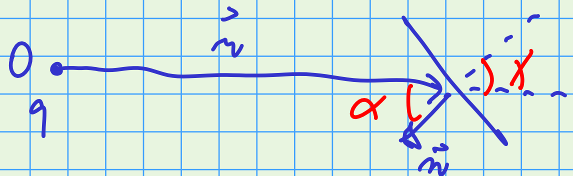
$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\vec{r}}{r^3}$ ← campo di carica nell'origine



$\vec{r} \cdot \vec{n}\, da = \pm r\, da \cos\gamma$

a seconda se $\vec{n}$ è opposto a $\vec{r}$

$\alpha = \pi - \gamma$



← $\vec{r} \cdot \vec{n}\, da = -r\, da \cos\gamma$

$\vec{n}$ è $\perp$ da → verso?

scelta del verso è arbitraria

① se ci sono tanti quadratini dovete scegliere verso concorde tra quadratini adiacenti

② CONVENZIONE → $\vec{n}$ diretto verso l'esterno se S è chiusa

COORDINATE POL SFERICHE

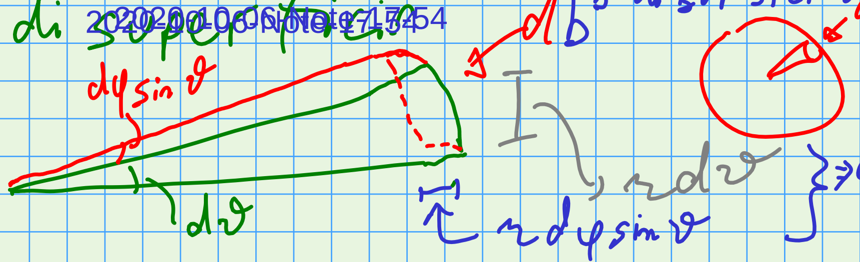
$$\begin{cases} x = r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y = r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z = r \cos\vartheta \end{cases}$$

$d^3 r = dx\, dy\, dz = r^2\, dr\, d\vartheta\, d\varphi \sin\vartheta$

↑ $r^2 \sin\vartheta$

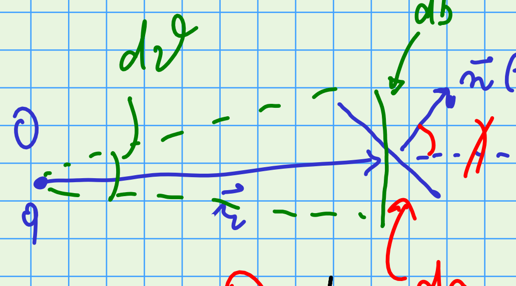
el infinit di sup sferica db

el di superficie



}⇒ area $\boxed{db = r^2\, d\vartheta\, d\varphi \sin\vartheta}$

trascuro la curvatura ($d\vartheta$ $d\varphi$ piccoli)



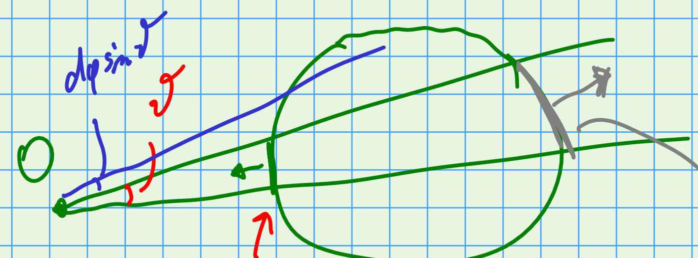
sfera centrata sulla carica

$$db = da\cos\gamma$$
$$\parallel$$
$$r^2 d\vartheta\, d\varphi \sin\vartheta$$

$$dF = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overbrace{\vec{r}\cdot\vec{n}\, da}^{\pm r\, da\cos\gamma}}{r^3} = \pm\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^3 d\vartheta\, d\varphi \sin\vartheta}{r^3}$$ indip da r!

proprietà generale di tutti i campi vettoriali che decrescono con $\frac{1}{r^2}$

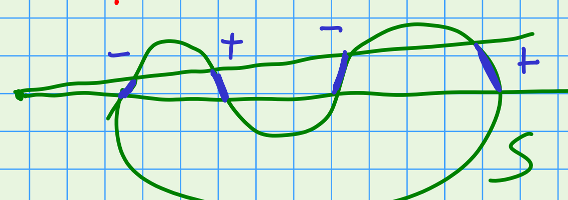
Per sup chiuse flusso tot è 0 se la carica è fuori



$$dF' = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\vartheta\, d\varphi \sin\vartheta$$

$$dF = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\vartheta\, d\varphi \sin\vartheta$$

$$dF + dF' = 0$$



$$dF(\vartheta,\varphi) = 0$$

FLUSSO TOT

$$\int_S dF = \int_S \overbrace{d^2r\, \vec{n}\cdot\vec{E}}^{\pm\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\vartheta\, d\varphi \sin\vartheta} = \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sin\vartheta = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Flusso attraverso n. dispari di sup → SE LA CARICA è DENTRO

$=0$

Flusso attrav n. pari → SE LA CARICA è FUORI

PIÙ CARICHE:

$$\boxed{F_{TOT} = \int_S d^2r\, \vec{n}(\vec{r})\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i^{\text{INTERNE a } S} q_i}$$ LEGGE di GAUSS

indip dalla forma di S

Distribuz continua di carica $\sum \to \int$ densità di carica

$$F_{TOT} = \int_S d^2r\, \vec{n}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d^3r\, \rho(\vec{r})$$ ← Q_{TOT} interna a V

V è il volume racchiuso da S : $\partial V = S$

Caso di sfera carica uniformemente

es: calcolare il campo elettrico

centro → all'origine, R

$$\int_{\text{Sfera}} d^2r\, \vec{n}\cdot\vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$ campo → sfruttiamo la simmetria

TRUCCO delle Simmetrie:

① individuare le coordinate adatte

② cosa succede se cambio una coord per volta: se il probleme è indip da questo cambio ⇒ la soluz è indip da quella coord

⇒ da consideraz di simmetria: il campo è radiale

$$\int d^2r\, \vec{n}\cdot\vec{E} \underset{\vec{E}\parallel\vec{n}}{=} \int_S d^2r\, E \underset{E=E(\vec{r})=E(r)}{=} E\int_S d^2r = ER^2\int_0^\pi d\vartheta\int_0^{2\pi} d\varphi \sin\vartheta = E\,4\pi R^2$$

$$= \frac{Q_{TOT}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{TOT}}{R^2} \qquad \underset{\uparrow}{\vec{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}}{R^3} Q_{TOT}$$

RADIALE

Campo di sfera carica è lo stesso se tutta la carica fosse al centro (campo fuori dalla sfera)

PARENTESI

generalizzazioni del teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\int_a^b dx \frac{\partial f}{\partial x} = f(b) - f(a)$$

① Teorema di Gauss

$$F_{TOT} = \int_{S=\partial V} d^2r\, \vec{n}\cdot\vec{v}(\vec{r}) = \int_V d^3r\, \vec{\nabla}\cdot\vec{v}(\vec{r})$$

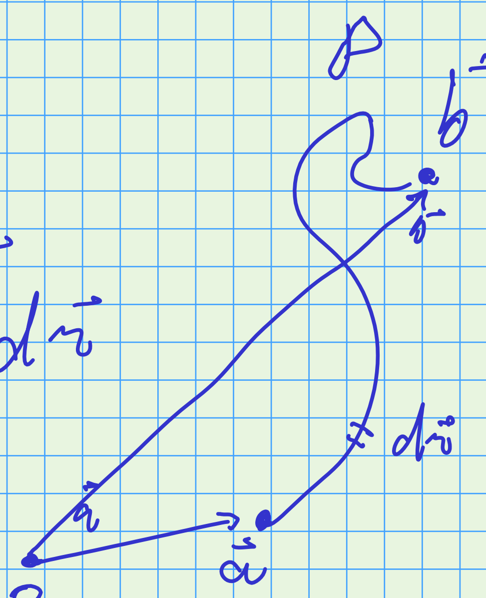
↑ sup chiusa

② T del GRADIENTE

$$_P\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{r}\cdot\vec{\nabla} f = f(\vec{b}) - f(\vec{a})$$

integrale di circuitazione

$$_P\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{r}$$



Parametrizzare il percorso P con un parametro s

$\vec{r}(s) \qquad \vec{r}(s_a) = \vec{a} \qquad \vec{r}(s_b) = \vec{b}$

$\uparrow$ Funzione vett di s

$$\frac{\partial \vec{r}(s)}{\partial s} = \left(\frac{\partial x(s)}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}\right)$$

$$P\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{r} \overset{def}{=} \int_{s_a}^{s_b} ds \, \frac{\partial \vec{r}}{\partial s}$$

$$\vec{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

dim (2)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\boxed{P\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} f} \overset{def}{=} \int_{s_a}^{s_b} ds \, \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \cdot \vec{\nabla} f =$$

$$= \int_{s_a}^{s_b} ds \, \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\right)}_{\frac{df}{ds}} =$$

$$f(\vec{r}) = f(\vec{r}(s))$$

$$= \int_{s_a}^{s_b} ds \, \frac{df}{ds} = f(s_b) - f(s_a) = f(\underbrace{\vec{r}(s_b)}_{\vec{b}}) - f(\underbrace{\vec{r}(s_a)}_{\vec{a}})$$